أساليب حل المسائل

تأليف
ستيفن جي كرانتس

ترجمه بتكليف من
مكتب التربية العربي لدول الخليج

د. معروف عبدالرحمن سمحان
د. فـوزي بـن أحـمد الـذكـير



أساليب حل المسائل

تأليف: ستيفن جي كرانتس

ترجمه بتكليف

من مكتب التربية العربي لدول الخليج

د. معروف عبد الرحمن سمحان   د. فوزي بن أحمد الذكير

جامعة الملك سعود - الرياض

الناشر

مكتب التربية العربي لدول الخليج

الرياض ١٤٣٥هـ /٢٠١٤م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر:

مكتب التربية العربي لدول الخليج

أساليب حل المسائل / ستيفن كرانتس؛ معروف عبد الرحمن سمحان؛ فوزي بن أحمد الذكير – الرياض، ١٤٣٥هـ.

٥١٦ ص، ٢٤ سم

ردمك: ٣-٥٤٦-١٥-٩٩٦٠-٩٧٨

١ - الرياضيات ٢ - الجبر

أ. سمحان، معروف عبد الرحمن (مترجم) . ج. العنوان

ديوي ٥١٠ ١٤٣٥/٣٨٠١

رقم الإيداع: ١٤٣٥/٣٨٠١

ردمك: ٣-٥٤٦-١٥-٩٩٦٠-٩٧٨

الناشر

مكتب التربية العربي لدول الخليج
ص. ب (٩٤٦٩٣) – الرياض (١١٦١٤)
تليفون: ٠٠٩٦٦١١٤٨٠٠٥٥٥
فاكس ٠٠٩٦٦١١٤٨٠٢٨٣٩
www.abegs.org
E-mail: abegs@abegs.org
المملكة العربية السعودية


بسم الله الرحمن الرحيم


MOHAMED KHATAB

المحتويـــات

تقديم

تعدُّ الرياضيات من أكثر العلوم استخداماً في شتى مناحي الحياة، البسيط منها والمعقد، فهي تستخدم في المجالات البسيطة في حياتنا اليومية مثل :حساب الفواتير، وحساب مقادير إعداد وجبة طعام، أو حساب كلفة تجديد إحدى غرف المنزل. كما تستخدم في مجالات معقدة مثل أمن المعلومات وتشفيرها، والاتصالات الفضائية. وعلى الرغم من هذه الأهمية للرياضيات فإن تعليمها في معظم الفصول الدراسية ، وفي معظم الدول المتقدمة والنامية ، يتم على أنه مجموعة طرق ينبغي على الطالب تعلمها للتقدم الدراسي، دون مساعدته على فهم ماهية الرياضيات وكيفية الاستفادة منها في كافة مجالات الحياة.

ويهدف كتاب " أساليب حل المسائل" إلى تدريس المبادئ الأساسية في حل المسائل سواء أكانت رياضية أم غير رياضية، من خلال التدريب على تحويل المناقشات الشفهية إلى بيانات يمكن تحليلها، وتعلم طرائق حل المسائل لمعالجة مجموعات من الأسئلة أو البيانات التحليلية، بالإضافة إلى توفير مخزون شخصي من المسائل المحلولة وأساليب حلها، كل ذلك بغية مساعدة الطالب ليكون مزوداً وجاهزاً لمعالجة فئات متنوعة من الألغاز التي تواجهه في مواقف حياتية مختلفة.

وقد قرر المكتب ترجمة هذا الكتاب الذي حاز على جائزة أفضل كتاب أكاديمي للعام ١٩٩٧م (CHOICE) ؛ ليكون رافداً لواحد من أهم برامجه في مجال الرياضيات في الدول الأعضاء بمكتب التربية العربي لدول الخليج (ABEGSMO) وهو برنامج أولمبياد

الخليج للرياضيات، آملين أن يكون مرشداً ودليلاً للمعلمين والطلاب وكافة المهتمين بالرياضيات، وأن يسد ثغرة في المكتبة التربوية العربية.

ولا يفوتني أن أشيد بالجهد الطيب الذي بذله كل من الدكتور معروف عبدالرحمن سمحان والدكتور فوزي بن أحمد الذكير في ترجمة الكتاب ، حتى جاء بالصورة التي هو عليها، فلهما مني جزيل الشكر والتقدير.

والله الموفق،،،

د. علي بن عبدالخالق القرني

المقدمة

Introduction

نظرة عامة [Overview]

نحتاج في معالجة العديد من المواقف التي نواجهها في حياتنا اليومية إلى حل مسائل: ما الطريقة الأمثل لتقسيط سيارة جديدة؟ كيف يمكن اختيار الشريك الآخر؟ ما الطريقة المثلى لجدولة المواد الدراسية للطالب؟ ما أفضل طريقة لموازنة نقودك؟

إن التفكير التحليلي ليس العلاج المطلق لمعالجة جميع المسائل ولكنه من الممكن أن يكون أسلوبًا فاعلاً لمعالجة العديد من المشكلات. معظم مقررات الدراسة الثانوية والدراسة الجامعية التي نقوم بتدريسها تعالج نتائج التفكير التحليلي ولكنها في الحقيقة لا تعالج طرق التفكير التحليلي.

يوجد العديد من الكتب الجيدة في حلِّ المسائل يرجع إصدار بعضها إلى القرن الماضي ولكن الاختلاف بينهما وبين هذا الكتاب هو أن المؤلف لا ينظر إلى موضوع حلول المسائل على أنه قائمة من القدرات العقلية الخلاقة ولكنه ينظر إليه على أنه طريقة حياة. يوظف معظم العلماء، الكيميائيين، الفيزيائيين، علماء النفس، المهندسين وغيرهم بحرفية كبيرة مجموعة من البيانات ومن ثم يتخذون القرارات في اختيار التقنية الملائمة لاستخدامها لحل المسألة. هذه الرؤية هي التي سيتبناها مؤلف هذا الكتاب لحلِّ المسائل.

إن هدف هذا الكتاب هو تدريس المبادئ الأساسية في حلِّ المسائل سواء أكانت مسائل رياضية أو غير رياضية. الجزء الكبير من هذا الكتاب يركز على تعليم كيفية تحويل مناقشات شفهية إلى بيانات يمكن تحليلها. وجزء أساسي ثان يتناول تعليم

طرائق حل المسائل لمعالجة مجموعات من الأسئلة أو البيانات التحليلية. وجزء ثالث من هذا الكتاب يهدف إلى توفير مستودع شخصي من المسائل المحلولة وأساليب حلها. لذا أستطيع الجزم بأن الطالب الذي يفهم مادة هذا الكتاب سيكون مسلحاً وجاهزاً لمعالجة فئات متنوعة من الألغاز التي تواجهه في مواقف حياتية مختلفة.

النسيج والأساليب [Technique And Texture]

من بين الأساليب المستخدمة في حل المسائل في هذا الكتاب هي الاستقراء، التناقض، الاستنفاد، التقسيم، القياس، التعميم، التخصيص، إعادة الصياغة، التفريق، إعادة التركيب، التحليل المساعد، العد، طرائق الرسم، الرسومات التخطيطية، وبالطبع فإن هذه القائمة ليست كاملة، كما أنه من الممكن استخدام أفكار من عدد من هذه الطرق لحلّ إحدى المسائل.

مع أن العديد من المسائل المطروحة في هذا الكتاب هي مسائل رياضية فإن ذلك لا يمنع من طرحنا مسائل عديدة خارج نطاق الرياضيات. نطمح في تقديم متنوعات من الأساليب التحليلية التي تمكن القارئ من استخدامها في العديد من المواقف. وبما أن مؤلف هذا الكتاب متخصص في الرياضيات وبما أن الرياضيات بطبيعتها مدينة إلى تكوين المسائل وحلّها فيكون من الطبيعي ظهور المسائل الرياضية في هذا الكتاب ولكن هذا ليس الهدف الوحيد من وراء تأليف هذا الكتاب.

وبناءً على ما ذكرناه في الفقرة السابقة فإننا نستغل هذه الفرصة لتدريس القارئ بعض الأفكار الرياضية المهمة وبعض أفكار التحليل في هذا السياق. من بين ذلك، طرق العد، الاستقراء، مفهوم "الوضع العام"، البرهان بالتناقض، أساليب التحليل الشفهية والرسم، مبدأ برج الحمام (الصندوق)، العلاقات الإرجاعية، الدوال المولّدة، بعض أفكار الاحتمالات والإحصاء وهكذا. هذه الأفكار ستقدم للطالب خدمة جليلة عند دراستها في بعض المقررات والمواضيع الأخرى.

نستخدم هذا الكتاب ولكن بصورة خفيفة كوسيلة لتقديم التقنية الحديثة للطالب. ونعني بذلك، أنه أثناء حل المسألة سنقول "في هذه المرحلة نستطيع استخدام التفاضل والتكامل ولكن عوضاً عن ذلك استخدم الالة الحاسبة لعمل التالي..". أو يمكن القول "لقد وصلنا في حلِّ هذه المسألة إلى حل المعادلة متسامية يستحيل حلها يدوياً، لذا استخدم برامج الجبر على حاسبك الشخصي..". مثل هذا الرابط مع التقنية سيحدث في أماكن محدودة من الكتاب ويتيح فرصة لتعليم الطالب كيفية استخدام الحاسب الآلي كوسيلة مساعدة كسائر الوسائل الأخرى مثل الكتاب أو المسطرة الحاسبة أو الآلة الحاسبة.

مقارنة مع كتب موجودة [Comparison With Existing Books]

يوجد عدد من الكتب التي تناقش طرائق فلسفية مطولة عن طبيعة حل المسائل. من بين أهم المؤلفين، لاكاتوز (Lakatos)، بوليا (Polya)، شونفيلد (Sheonfeld) وآخرين غيرهم (انظر: قائمة المراجع). نحث القارئ على الاطلاع على هذه المؤلفات. أما كتابنا هذا فإنه يأخذ منحنى مباشراً وعملياً في تناوله للموضوع. إننا مقتنعون أن الطريقة المثلى لتعلم حل المسائل تكون بحلِّ المسائل (لاحظ أن جميع المتخصصين في حل المسائل لا يتفقون معنا في هذا الرأي). إن هذا يشبه إلى حدّ كبير تعلّم العزف على البيانو فالوسيلة المثلى لتعلّم العزف على البيانو تكون بالبدء في العزف. معظم مدربي العزف على البيانو يستخدمون قائمة من المعزوفات لتقييم طلبتهم ولكنهم لا يأخذون بعين الاعتبار في هذا التقييم شعور وإحساس المتدرب أثناء ملامسته لمفاتيح آلة البيانو. ولهذا فإننا نقدم مادة تعليمية أثناء حل المسائل ولكننا نحجم عن النقد المنطقي (غير الحدسي) لوجود طريقة الحلّ.

إحدى ميزات هذا الكتاب عن غيره من كتب حلول المسائل هي تقديمه تمارين. تأخذ هذه التمارين صورتين. تمارين "تحدي" وتقدم عادة بعد حل عدد من المسائل لكي

يحاول القارئ حلها. في العادة تحتوي تمارين التحدي على تقنية لها علاقة بالتقنية المستخدمة في حلول المسائل التي سبقتها. من الممكن أن تسأل عن تعميم لمسائل سابقة أو شكل آخر لمسألة سابقة أو حل مسألة لها نفس طابع مسألة سابقة. نشجع القارئ على حل مسألة التحدي مباشرة عند تقديمها (على الأقل يحاول محاولة أولى). بعض مسائل التحدي صعبة (وهذا متعمد) ويتطلب حلّها محاولات عديدة. وأما النوع الآخر من التمارين فهي تمارين تقدم للقارئ في نهاية كل فصل من فصول الكتاب. جميع هذه التمارين مرتبطة إلى حد كبير مع المادة العلمية المقدمة في الكتاب. يوجد أكثر من 350 تمريناً من هذا نوع. ويمكن إيجاد حلول معظم هذه التمارين في النسخة الإنجليزية من كتاب الحلول المصاحبة لهذا الكتاب.

متطلبات سابقة [Prerequisites]

لهذا الكتاب القليل من المتطلبات السابقة. بالتأكيد لا نحتاج إلى التفاضل والتكامل (مع أن القليل من المسائل يحتاج إلى التفاضل والتكامل وسنشير إلى ذلك عند ورودها. القارئ الذي على استعداد لتقبل ذلك لن يواجه مشكلة مع هذا العدد القليل من المسائل التي تحتاج إلى التفاضل والتكامل). نحتاج لبعض الجبر وحساب المثلثات. ولكن الهدف الأساسي من هذا هو أن يكون كتاب تبرير أكثر من كونه كتاباً في الرياضيات. معظم الطلاب الذين لديهم مستوى متواضع من الرياضيات أو التفكير التحليلي سوف يستفيدون من هذا الكتاب.

شكـــر وتقدير
Acknowledgements

لقد قرأ عدد من الزملاء أجزاء من هذا الكتاب وقدموا اقتراحات قيمة. من بينهم، فيونا شابل، ن.م.كومار، فالاديمير ماسيك، روبرت ماكدويل، ريتشاد روتشبيرغ، ستيفن وينتروب، جودو وايز. قرأ كورتني كولمان عدة أجزاء من هذا المشروع سطرًا سطرًا وقدم إسهامات قيمة. أسهم كل من ماكدويل وروتشيرغ بعدد من المسائل القيمة. قدمت لنا أمينة المكتبة باربرا لوزنسكا خدمة كبيرة بالبحث عن المصادر. أما لويس فيرنانديز و هايدي غورنساراب فقدما جهدًا رائعًا في كتابة كتاب الحلول المصاحب لهذا الكتاب. لكل هؤلاء أقدم شكري العميق أما الطلاب مقرر حلول المسائل فكانوا ممتعين، وأسهموا في ظهور هذه الكتاب بطريقتين ملموسة وغير ملموسة.

أودُّ التعبير عن تقديري لقسم الرياضيات في جامعة واشنطن في سانت لويس للسماح ليّ بتضمين مقرر حلّ المسائل في خطتهم الدراسية مما أتاح ليّ فرصة تطوير هذا الكتاب. وأخيرًا أقدم شكري لمؤسسة كيمبر على تقديم المنحة المالية لإصدار هذا الكتاب.

س.ج.ك

سانت لويس- ميسوري

مفاهيم أساسية
Basic Concepts

(١,١) ملحوظات استهلالية Introductory Remarks

إن كتابة كتاب في حلِّ المسائل ضرب من الحماقة وهذا ينطبق أيضًا على كتابة كتاب في السباحة أو العزف على البيانو، والسبب في ذلك يرجع إلى استحالة تعلم هذه المهارات بالقراءة عنها. ولكن هذا التعلّم يتم بالتدريب على هذه المهارات. في الحقيقة يجب أن تغوص في هذا التدريب. هذا يشبه إلى حدٍّ بعيد تشكيل الحديد الذي يستلزم خطة صارمة ومنظمة للتمكن من ذلك. ولهذا، نحتاج لتطوير مهارات حلِّ المسائل إلى تدريب صارم وجهد كبير.

على الرغم من ذلك فإن تعلّم حلّ المسائل يمكن أن يكون مسليًّا ويعود عليك بمردود جيد، فمن خلاله تتمكن من تطوير وتوسيع قدراتك العقلية والتسلح بتقنية يمكن استخدامها في دراستك الأخرى أو حياتك اليومية.

يركز هذا الكتاب على أنماط معينة من حل المسائل وعلى المعالجات الذهنية التي نحتاجها في حل هذه المسائل. يتم توضيح كل من المفاهيم المقدمة بعدد من الأمثلة التي تساعدك في التدريب على أساليب حلّ المسائل. ولهذا يجب أن تكون حريصًا على تتبع هذه الأمثلة باهتمام كبير لأن الأمثلة أهم بكثير من الملحوظات الفلسفية التي تسبقها.

تحتاج بعض الأمثلة إلى وقت لاستيعابها ولكن حلّها يكون في غاية الأهمية. إذا كنت تستخدم هذا الكتاب في مقرر دراسي فاحرص على مناقشة مدرسك وزملاء فصلك وإخبارهم عن المسائل التي تقوم بدراستها والأساليب التي تتعلمها من حل هذه

المسائل (تعلم كيفية طرح الأسئلة). جزء من العملية التعليمية يكون بتعلم الدقة في صياغة المسائل وطرح الأسئلة. تحتاج أيضًا إلى تعلّم عملية التواصل والتبرير والتحليل، وهذا تمرين شاق يجب أن تتدرب عليه وحدك ومع الآخرين أيضًا. قم برمي كرة ذهابًا وإيابًا وهرول حول الملعب (ذهنيًّا).

جزء مهم آخر في هذا الكتاب أو هذا المقرر أو العملية التعليمية بالعموم هو التعلّم على القراءة، لا نعني بذلك التغلب على الأمية لأن القدرة على قراءة هذه السطور يعني أن مشكلة الأمية محلولة. ولكن ما نقصده بالقراءة هنا هو قراءة مسألة أو فقرة تحليلية أو حل مسألة إلى النهاية والتمكن من فَهم هذا الحل تمامًا وشخصنة هذا الحلّ.

إن الأفكار والأساليب التي تضفي عليها صفة الذاتية يكون بمقدورك امتلاكها وتوظيفها لمصلحتك، ثم تصبح تحت تصرفك ومن أدواتك الشخصية. هذا الكتاب مصمم لكي تكون قادرًا على إضفاء صفة الذاتية على المسائل التي تقوم بحلّها وجعلها جزء من تفكيرك الذهني المستمر.

تتم كتابة معظم الكتب بصورة خطية وهذا الكتاب ليس استثناءً. أي إمكانية استخدام الأفكار السابقة في حل مسألة لاحقة. ومع ذلك فإنه من الممكن تصفح الكتاب لتعرّف المسائل التي سيتناولها الكتاب وتختار المسائل التي تعتقد أنها أكثر أهمية بالنسبة لك.

نبدأ في البند القادم. بحل المسائل. في البداية يكون اهتمامنا منصبًا على التعلّم على كيفية التغلب على "القصور العقلي". من الممكن أن يكون رد فعلك (وهذا طبيعي ويحصل حتى مع مَنْ لديهم قدرات وخبرات طويلة في حلِّ المسائل) عند مواجهة مسألة صعبة القول: "لا أعرف كيفية حل هذه المسألة. سأتناول غدائي". وعوضًا عن ذلك فإن الهدف هنا هو تدريبك على مقاومة هذا الشعور. لذا فعند مواجهة مسألة جديدة ستقول

"لقد رأيت مشابهة لها من قبل. دعني أجرب هذا ... دعني أرسم شكلاً. دعني أعيد صياغتها على النحو...... دعني أجرب مثالاً". أدرس هذا الكتاب وسوف تتعلّم التفكير بهذه الطريقة، ليس فقط في مقررات الرياضيات بل في جميع المواقف التي تواجهك.

(١,٢) المسألة الأولى First Problem

نبدأ بتحليل مسألة سهلة. هذا المسألة لها ما يميزها حيث لا تستطيع التفكير بربطها مع مسألة أخرى أو أسلوب حل آخر. حلها لا يتطلب معرفة أو خبرة سابقة.

مسألة (١,٢,١)

ما عدد الأصفار التي ينتهي بها العدد $100!$ ؟

الحل: لاحظ أن:

$$100! = 100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

نحصل على صفر في نهاية حاصل الضرب عندما نضرب بالعدد 10. لذا فإن الضرب بأي عدد ينتهي (مرتبة آحاده) بالأعداد 1، 3، 7، 9 لا يمكن أن يضيف صفراً إلى حاصل الضرب (لأن جميع هذه الأعداد لا تقسم العدد 10). لاحظ أن تحليل العدد 10 إلى عوامل أولية هو $2 \times 5 = 10$. سنحاول حل هذه المسألة بحساب عدد مرات تكرار القاسم 5 في العدد $100!$.

- الأعداد من 1 إلى 10: العدد 5 يقسم عددين فقط هما 5 و 10. يمكن الحصول على صفر بضرب العدد 5 في العدد 2 وصفر آخر من العدد 10. لهذا فإن هذه الأعداد تسهم بصفرين في العدد $100!$.
- الأعداد من 11 إلى 20: العدد 5 يقسم عددين فقط هما 15 و 20. وبصورة مشابهة لما سبق فإن هذه الأعداد تسهم أيضًا بصفرين في العدد $100!$.

- الأعداد من 21 إلى 30 : العدد 5 يقسم عددين فقط هما 25 و 30 ، ولكن الوضع هنا مختلف عن السابق لأن 5 يقسم 25 مرتين. إذن،

$$22 \times 24 \times 25 = 11 \times 12 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$
$$= 11 \times 12 \times 10 \times 10$$

- ومن ثم يسهم العدد 25 بصفرين والعدد 30 بصفر واحد ونحصل على ثلاثة أصفار في هذه الحالة.
- الأعداد من 31 إلى 40 : العدد 5 يقسم عددين فقط هما 35 و 40 وكل منهما يسهم بصفر واحد في المضروب. لذا نحصل على صفرين في هذه الحالة أيضًا.
- الأعداد من 41 إلى 50 : هنا العدد 5 يقسم 45 مرة واحدة ويقسم 50 مرتين. إذن، نحصل على ثلاثة أصفار في المضروب في هذه الحالة.
- الأعداد من 51 إلى 60 : هنا العدد 5 يقسم كلاً من 55 و 60 مرة واحدة وبهذا نحصل على صفرين في المضروب.
- الأعداد من 61 إلى 70 : العدد 5 يقسم كلاً من 65 و 70 مرة واحدة وبهذا نحصل أيضًا على صفرين في المضروب.
- الأعداد من 71 إلى 80 : العدد 5 يقسم 75 مرتين ويقسم 80 مرة واحدة. وبهذا نحصل على ثلاثة أصفار.
- الأعداد من 81 إلى 90 : العدد 5 يقسم كلاً من 85 و 90 مرة واحدة. لذا نحصل على صفرين هنا.
- الأعداد من 91 إلى 100 : العدد 5 يقسم 95 مرة واحدة ويقسم 100 مرتين. لذا نحصل على ثلاثة أصفار في هذه الحالة.

وبهذا فإن العدد الكلي للأصفار التي ينتهي بها العدد $100!$ هو:

$$2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 = 24 \qquad \square$$

يقدم هذا المثال عدة معالم لنجاح حل المسائل:

- حددنا المعالم الأساسية التي تعتمد عليها المسألة (نحصل على الأصفار من عملية الضرب في العدد 10).
- بدأنا بتحليل حالة خاصة (أي $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 8 \times 9 \times 10$).
- بينا كيفية استخدام الحالة الخاصة للحصول على حلّ المسألة.

ليس بالضرورة أن يؤدي دائماً اختبار حالة خاصة أو حالة أصغر إلى حل للمسألة المطلوبة، ولكنها على الأقل تزودنا بخطوة أولى. سيكون ذلك واحداً من الأساليب الكثيرة التي نستخدمها في حل المسائل.

وبإعادة النظر إلى حلّنا للمسألة الأولى، نجد أنه كان بإمكاننا أن نكون أكثر ذكاءً لأن عدد مضاعفات العدد 5 من الواقعة بين الأعداد من 1 إلى 100 يساوي $100 \div 5 = 20$. أربعة من هذه المضاعفات هي أيضاً مضاعفات للعدد 25، ومن ثم فكل منها يسهم بصفرين في نهاية المضروب. وبهذا نحصل على 24 قاسماً للعدد 5 في المضروب $100!$. وبضرب كل منها بعدد زوجي نحصل على قاسم للعدد 10، ومن ثم على صفر. إذن، عدد الأصفار التي ينتهي بها المضروب $100!$ يساوي 24.

المثال التالي هو مثال آخر على التخصيص.

مسألة (١.٢.٢)

عدد طلاب مقرر في الرياضيات يساوي 12. مع بداية كل محاضرة يقوم كل طالب من طلاب المقرر بمصافحة كل طالب من طلاب المقرر الآخرين. ما عدد المصافحات؟

الحل:

نبدأ بحالة خاصة ثم نستخدمها لإيجاد الحالة العامة (حالة 12 طالباً).

نفرض أن عدد الطلاب يساوي 2. في هذه الحالة تتم مصافحة واحدة فقط.

نفرض الآن دخول طالب ثالث إلى الصف. هذا الطالب سيصافح كل من

الطالبين الموجودين في الفصل. أي نحصل على مصافحتين جديدتين ليكون العدد الكلي للمصافحات يساوي $1 + 2 = 3$.

إذا دخل الآن طالب رابع إلى الفصل فإنه سيصافح الطلاب الموجودين قبله. وفي هذه الحالة يكون عدد المصافحات الكلي هو $1 + 2 + 3 = 6$.

النمط الآن واضح: بإضافة طالب خامس يصبح عدد المصافحات 1+2+3+4.

إذن، عدد المصافحات التي نحصل عليها من 12 طالباً هو :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 + 11 = 66$$

وبهذا نكون قد أنهينا حل المسألة. □

في العديد من الحالات يقود حل أو تحليل مسألة إلى اقتراح مسائل أخرى. المسألة التالية يقترحها حل المسألة (١.٢.٢).

مسألة (١.٢.٣)

افرض أن k عدد صحيح موجب. ما قيمة مجموع الأعداد الصحيحة $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k$ ؟

نمهد لحل المسألة بتقديم المناقشة التمهيدية التالية: اعتبر أن S دالة

$$S(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k$$

ما الخواص الأساسية لهذه الدالة؟ إذا ازدادت دالة $f(k)$ بمقدار ثابت (ليكون 3) عند زيادة k بمقدار 1 فإن الدالة يجب أن تكون خطية. في الحقيقة، يجب أن تأخذ f الصورة $f(k) = 3k + b$. وبالمثل، إذا ازدادت الدالة g بمقدار دالة خطية في المتغير k مع كل زيادة في k بمقدار 1 فإننا نتوقع أن تكون الدالة g دالة تربيعية (الذين يعرفون تفاضل وتكامل سيفكرون بمفهوم المشتقة: مشتقة دالة تربيعية هي دالة خطية). على سبيل المثال، إذا كانت $g(k) = k^2$ فإن $g(k+1) - g(k) = 2k + 1$ وهذا الفرق هو دالة خطية.

ستقودنا هذه الملاحظات إلى حل مسألتنا.

الحل:

إحدى طرق إيجاد مجموع أعداد هي كتابة كل من الحدود بطريقة تساعدنا على حذف بعضها. لاحظ أن:

$$\begin{aligned} 2^2-1^2 &= 3 = 2\times 1+1 \\ 3^2-2^2 &= 5 = 2\times 2+1 \\ 4^2-3^2 &= 7 = 2\times 3+1 \\ &\cdots \\ k^2-(k-1)^2 &= 2(k-1)+1 \\ (k+1)^2-k^2 &= 2\times k+1 \end{aligned}$$

الآن، بإضافة هذه المعادلات نحصل على:

$$\begin{aligned} &(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+(4^2-3^2)+\cdots+\ (k+1)^2-k^2 \\ &= (2\times 1+1)+(2\times 2+1)+(2\times 3+1)+\cdots+(2\times k+1) \end{aligned}$$

الطرف الأيسر هو مجموع "متداخل أو منظاري" (أي أن جميع الحدود في المجموع تحذف بعضها البعض ما عدا الحد الأول والأخير). أما الطرف الأيمن فيكمن تحليله. وبهذا نحصل على:

$$(k+1)^2-1^2 = 2(1+2+3+\cdots+k)+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\ \text{مرة}})$$

$$k^2+2k = 2S+k$$

حيث S **هو المجموع المراد حسابه. بحل هذه المعادلة نحصل على:**

$$S=\frac{k^2+k}{2}.$$ □

يعزي المجموع الذي حصلنا عليه في المسألة أعلاه إلى الرياضي كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss) الذي عاش في الفترة بين 1777 إلى 1855، ولكن توجد دلائل تشير إلى معرفة هذا المجموع قبل ذلك.

مسألة (١,٢,٤)

استخدم طريقة حل المسألة السابقة لإيجاد صيغة للمجموع $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2$ حيث k عدد صحيح موجب.

إن حل المسألة السابقة يلقي بعض الضوء على مسألة "المصافحة" سابقة الذكر. فإذا كان k هو عدد طلاب المقرر، وأن كل طالب يصافح كل من الطلاب الآخرين فإن حل المسألة (١,٢,٢) يبين أن عدد جميع المصافحات هو:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)$$

واستنادًا إلى المسألة (١,٢,٣) نجد أن هذا المجموع هو:

$$\frac{(k-1)^2 + (k-1)}{2} = \frac{k^2 - k}{2}.$$

السؤال التالي يمكن أن يطرح حول مسألة تصافح الأيدي.

مسألة (١,٢,٥)

بالرجوع إلى المسألة (١,٢,٢) مرة أخرى، لكن بفرض أن عدد الطلاب المقرر يساوي k. إذا كان k عددًا زوجيًّا فهل عدد المصافحات زوجي أم فردي ؟ وإذا كان k عددًا فرديًّا فهل عدد المصافحات زوجي أو فردي؟

الحل:

إذا كان عدد الطلاب يساوي 2 (قيمة زوجية للعدد k) فإن عدد المصافحات يساوي 1 وهو عدد فردي. إذا أضفنا طالبًا جديدًا فإننا سنضيف مصافحتين، أي إذا كان عدد الطلاب 3 (فردي) فإن عدد المصافحات يساوي 3 (فردي). إذا أضفنا طالبًا آخر فإننا سنضيف 3 مصافحات لنحصل على 6 (زوجي) من المصافحات عندما يكون عدد الطلاب 4 (زوجي).

إذا حاولنا تلخيص بعض الحالات في جدول فسنحصل على:

نوعية المصافحة	عدد المصافحات	عدد الطلاب
زوجي	0	0
زوجي	0	1
فردي	1	2
فردي	3	3
زوجي	6	4
زوجي	10	5
فردي	15	6
فردي	21	7
زوجي	28	8
زوجي	36	9
فردي	45	10
فردي	55	11
زوجي	66	12
زوجي	78	13

لاحظ أننا أضفنا الحالتين عندما يكون عدد الطلاب 0 و 1 وهذا إجراء معمول به في الرياضيات لغرض تسهيل النقاش.

نلاحظ من الجدول أن عدد المصافحات زوجي في أول حالتين ثم فردي في الحالتين التاليتين ثم يتبعها حالتان زوجيتان وبعد ذلك حالتان فرديتان وهكذا.

يكرر النمط نفسه كل أربع حالات. لاحظ أننا نحصل على عدد المصافحات لطلاب عددهم $k+2$ بإضافة عدد المصافحات لطلاب عددهم k وعدد المصافحات لطلاب عددهم $k+1$. لكننا نعلم أن عدد المصافحات لطلاب عددهم k هو $\frac{k^2-k}{2}$.

تحقق من صواب ذلك للأعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8. وبهذا فإننا نستنتج أنه إذا

كان l عددًا صحيحًا غير سالب فإن:

(i) عدد المصافحات في الصفين $4l$ و $4l+1$ زوجي.

(ii) عدد المصافحات في الصفين $4l+2$ ، $4l+3$ فردي.

وبهذا نكون قد أنهينا تحليلنا لنوعية عدد المصافحات عندما يكون عدد الطلاب يساوي k. □

لاحظ أن تحليلنا للمسألة (١,٢,٥) لا يتفق مع موضوع هذا البند حيث لم يتم حلّها بدراسة حالات بسيطة أولاً، لكن الغرض من تقديمها هنا هو اعتمادها على نتيجة المسألة (١,٢,٢).

نعود الآن لتقديم مثالنا الأخير على أسلوب التخصيص.

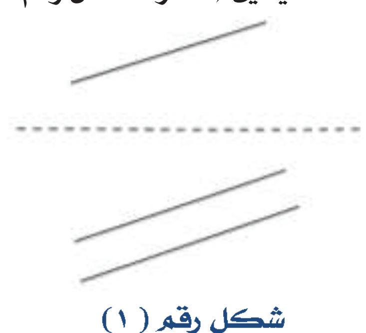
مسألة (١,٢,٦)

ما أكبر عدد من المناطق الناتجة عن تقسيم ثلاثة مستقيمات (غير منتهية) للمستوى؟

الحل:

نبدأ بطرح سؤال أبسط: ما أكبر عدد من المناطق الناتجة عن تقسيم المستوى بمستقيم واحد؟ من الواضح أن الإجابة سهلة هنا لأن المستقيم يقسم المستوى إلى منطقتين.

ننتقل الآن إلى حالة مستقيمين (انظر: الشكل رقم ١).

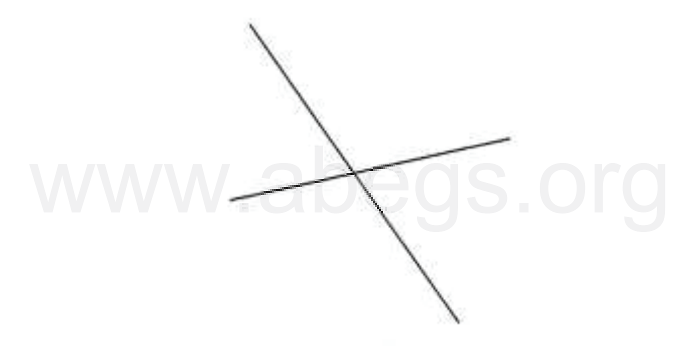


شكل رقم (١)

في أعلى الشكل رقم (١) المستقيمان متطابقان، لذا فعدد المناطق لا يزال 2. أما إذا كان المستقيمان مختلفين ولكنهما متوازيان (كما في أسفل الشكل رقم ١) فإن المستقيمين يقسمان المستوى إلى ثلاث مناطق.

نسمي الحالتين السابقتين بالحالات المضمحلة أو غير النمطية للسبب التالي: إذا رمينا قشتين على أرض الغرفة فإن احتمال وقوعهما واحدة فوق الأخرى أو وقوعهما متوازيتين يساوي صفرًا ولكن احتمال وقوعهما متخالفتان (غير متوازيتين) فيساوي 1. والحالة الأخيرة هذه تسمى "الحالة العامة" لوقوع القشتين.

لنفرض الآن أن المستقيمين بوضعهما العام كما هو موضح في الشكل رقم (٢).

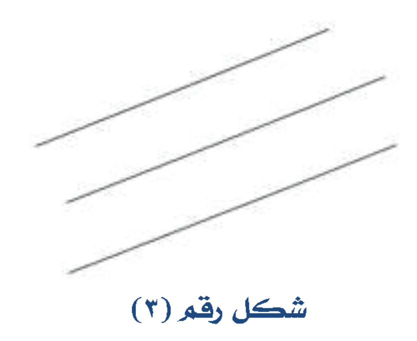


شكل رقم (٢)

في هذه الحالة يقسم المستقيمان المستوى إلى أربع مناطق.

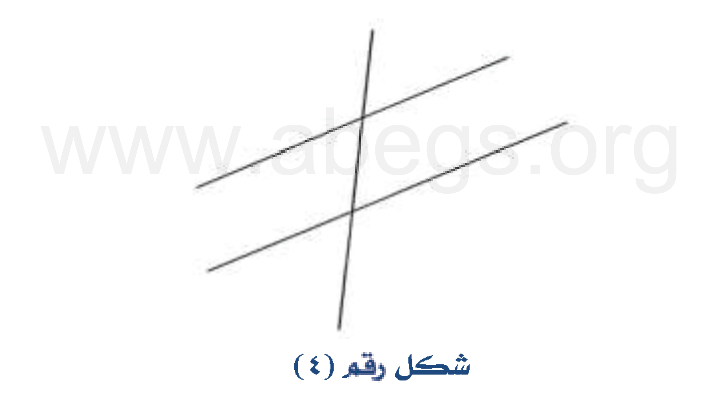
ننتقل الآن إلى حالة المستقيمات الثلاثة. إذا تطابقت المستقيمات الثلاثة فإننا نعود إلى حالة المستقيم الواحد. وإذا تطابق مستقيمان فيكون لدينا حالة المستقيمين. لذا نفرض أن المستقيمات الثلاثة مختلفة.

إذا كانت المستقيمات الثلاثة متوازية فإنها تقسم المستوى إلى أربع مناطق (انظر: الشكل رقم ٣).



شكل رقم (٣)

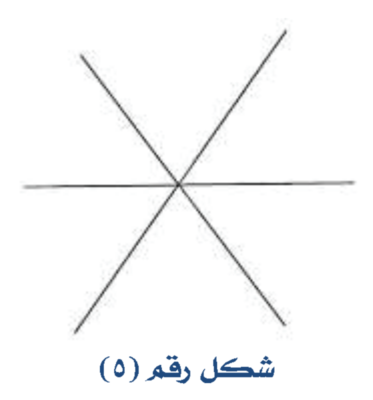
إذا كان اثنان منهما متوازيين والثالث متخالف معهما فإنها تقسم المستوى إلى ست مناطق (انظر : شكل رقم ٤).



شكل رقم (٤)

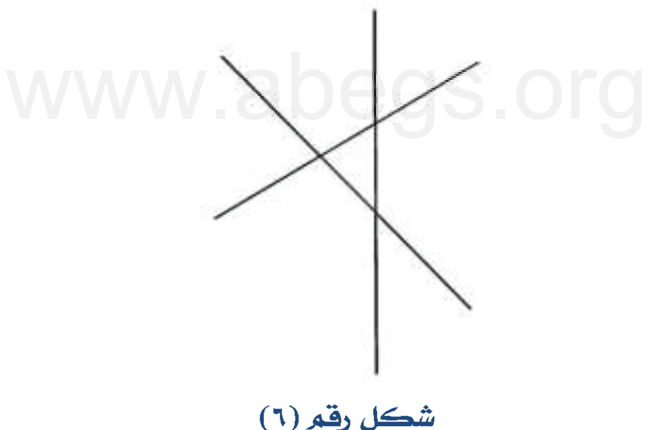
نفرض الآن أنه لا يوجد مستقيمان متوازيان من المستقيمات الثلاثة.

إذا تقاطع المستقيمات الثلاثة في نقطة واحدة (انظر : الشكل رقم ٥) فإنها تقسم المستوى إلى ست مناطق.



شكل رقم (٥)

أما إذا لم تتقاطع المستقيمات الثلاثة في نقطة واحدة ولا يوجد مستقيمان منها متوازيين (هذه الحالة العامة. أي الحالة التي احتمالها 1، انظر: الشكل رقم ٦) فإن المستقيمات تقسم المستوى إلى سبع مناطق.



شكل رقم (٦)

إذن، سبع مناطق هو العدد الأكبر من المناطق التي نحصل عليها من تقسيم ثلاثة مستقيمات للمستوى. □

من المؤكد استخدامنا لطريقة التخصيص لحالات بسيطة لكي نستطيع رؤية حل المسألة، ولكننا استخدمنا أيضًا طريقة أخرى هي طريقة الاستنفاد. استخدمنا مفهومي التوازي والتقاطع الذي أطلقنا عليهما: "الحالة العامة" لكي نتوصل إلى

جميع الأوضاع الممكنة للمستقيمات. نعتقد أن تعميم هذه المسألة إلى أربعة أو خمسة مستقيمات سيعود بفائدة كبيرة على القارئ.

ننهي هذا البند في المسألة الثانية من مسائل التحدي العديدة. ترتبط هذه المسائل التي نطلب من القارئ حلّها ارتباطًا وثيقًا مع مسائل الكتاب. يجب عليك محاولة حلّها مباشرة بعد أن تكون قد قرأت حلول المسائل التي قبلها. في بعض الأحيان تكون مسائل التحدي روتينية ولا تحتوي على أفكار جديدة وفي أحيان أخرى تكون أصعب وتحتوي على بعض الأفكار التي لم تسبق الإشارة إليها في أمثلة وتمارين الكتاب. الغرض من تقديم مثل هذه المسائل هو تشجيع القارئ على اختبار قدراته على التفكير والتخيل. وعلى وجه الخصوص يجب أن يستخدمها القارئ كوسيلة لمناقشة الآخرين ومحاولة توليد أفكار جديدة.

مسألة التحدي (١،٢،٧)

ما أكبر عدد من المناطق الناتج عن تقسيم خمسة مستويات لفضاء ثلاثي البُعد؟

الإجابة هي 26 منطقة لكن من الصعب تخيل الوضع. من الملفت للنظر أن الحلّ ليس صعبًا جدًّا، ولكن الصعب هنا هو كيفية تسخير معلوماتك في الهندسة ثلاثية البُعد للحصول على حل. قدم جون سنونو (John Sununu) وهو أحد أعضاء طاقم موظفي البيت الأبيض في عهد الرئيس جورج بوش حلاً لهذه المسألة عندما كان شابًا. سنقوم بمناقشة حل هذه المسألة لاحقًا في هذا الكتاب.

(١،٣) كيفية العد How To Count

يمكن اعتبار المسألة (١،٢،١) على أنها "مسألة عد" بسيطة. تأخذ مسائل العد صورًا عديدة: كم عدد المجموعات المكونة من خمس أوراق لعب التي يمكن الحصول

عليها في لعبة البوكر؟ بكم طريقة يمكن الحصول على العدد 8 عند إلقاء حجري نرد؟ كم عدد الطرق المختلفة لتكوين دولار واحد باستخدام قطع نقود من فئات الخمسة سنتات والعشرة سنتات وأرباع الدولار؟

تعتمد أساليب العد على وجود إستراتيجية منظمة. نبدأ بواحدة من مسائل العد البدائية.

مسألة (١،٣،١)

لتكن $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ مجموعة عدد عناصرها k. ما عدد الأزواج المرتبة المختلفة (أي أن الإحداثي الأول من الزوج المرتب لا يساوي الإحداثي الثاني من الزوج) التي يمكن تكوينها من هذه العناصر؟

الحل:

يوجد k من الخيارات الممكنة (أي من العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_k$) للإحداثي الأول من الزوج المرتب. بعد اختيار عنصر للإحداثي الأول، ما عدد الخيارات الممكنة للإحداثي الثاني؟ يمكن اختيار الإحداثي الثاني من باقي العناصر والتي عددها $(k-1)$. فإذا اخترنا a_1 للإحداثي الأول فمن الممكن أن يكون الإحداثي الثاني أياً من العناصر $a_2, a_3, \ldots, a_k$. أي $(k-1)$ من الخيارات. أما إذا اخترنا a_2 للإحداثي الأول فيمكن اختيار الإحداثي الثاني ليكون أياً من $a_1, a_3, \ldots, a_k$ وعددها $(k-1)$ أيضاً. وهكذا.

لذا فإننا نخلص إلى أن عدد خيارات الإحداثي الأول من الزوج المرتب هو k ولكل من هذه الخيارات يوجد $(k-1)$ من الخيارات للإحداثي الثاني. إذن، عدد الأزواج المرتبة المختلفة التي يمكن تكوينها من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ هو $k(k-1)$. □

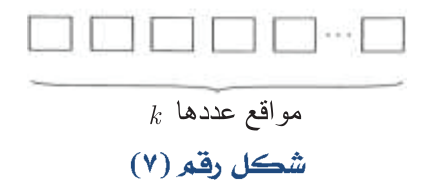
من الممكن تبني إستراتيجية حل مسألة العد السابقة للحصول على حقيقة أساسية عن عدد تبديلات (permutations) أو ترتيبات (orderings) مجموعة منتهية.

مسألة (١,٣,٢)

لدينا مجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ عدد عناصرها k. ما عدد الترتيبات المختلفة لعناصر هذه المجموعة؟

الحل:

لنفرض أن لدينا k من المواقع لوضع هذه العناصر (انظر: الشكل رقم ٧).



شكل رقم (٧)

عدد الخيارات للموقع الأول يساوي k (أي من العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_k$). بعد وضع عنصر في الموقع الأول يتبقى $(k-1)$ من العناصر المختلفة لاختيار أحدها ووضعه في الموقع الثاني. لذا وبنفس التبرير الذي قدمناه في المسألة السابقة نجد أن عدد الطرق التي يمكن فيها ملأ الموقعين الأول والثاني هو $k(k-1)$.

بعد أن اخترنا عنصري الموقعين الأول والثاني يبقى لدينا $(k-2)$ من العناصر لاختيار أحدهما للموقع الثالث. إذن، عدد الطرق ملأ المواقع الثلاثة الأولى هو $k \times (k-1) \times (k-2)$.

وبالأسلوب نفسه نجد أن عدد طرق ملأ المواقع الأربعة الأولى هو $k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3)$، وأن عدد طرق ملأ المواقع الخمسة الأولى هو $k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3) \times (k-4)$ وهكذا. لذا فإننا نخلص في نهاية الأمر إلى أن عدد الترتيبات المختلفة لمجموعة العناصر $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ هو :

$$k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = k! \qquad \square$$

يعتمد النجاح في الوصول إلى حل للعديد من مسائل العد على معرفة "الدالة المختارة". المسألة التالية تلقي الضوء على ذلك.

مسألة (١,٣,٣)

لنفرض أن $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ مجموعة عدد عناصرها k وأن m عدد صحيح موجب لا يزيد على k. كم عدد الطرق المختلفة لاختيار m من عناصر هذه المجموعة؟

كمثال على مثل هذه المسألة هو إيجاد عدد الطرق المختلفة لاختيار مجموعة مكونة من 5 أوراق من مجموعة أوراق اللعب (عددها 52). أو عدد فرق كرة القدم المختلفة (عدد الفريق 11 لاعبًا) التي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من 25 لاعبًا. إن ما يميز هذه المسألة عن المسائل السابقة هو عدم اهتمامنا هنا في الترتيب. فمثلاً، عند اختيار 5 أوراق اللعب نجد أن الخيار:

$$A\spadesuit,\quad K\heartsuit,\quad J\spadesuit,\quad 9\clubsuit,\quad 7\diamondsuit$$

هو نفس الخيار

$$K\heartsuit,\quad 7\diamondsuit,\quad 9\clubsuit,\quad A\clubsuit,\quad J\clubsuit$$

نقدم الآن حل المسألة.

الحل:

ما نحتاجه هنا هو إستراتيجية لاختيار m عنصر من بين k من العناصر. لنفرض أننا قمنا بعمل التالي: اخترنا ترتيبًا لمجموعة العناصر التي عددها k ومن ثم قمنا باختيار ترتيب أول m من هذه العناصر (انظر: الشكل رقم ٨).

k من العناصر

□□□□□□□□□□□□···□□

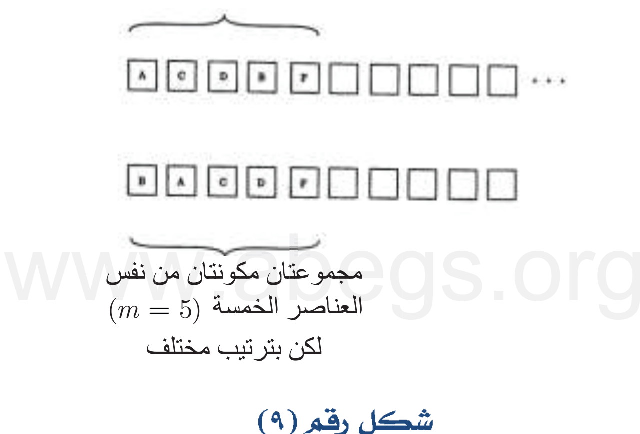
أول m من العناصر

شكل رقم (٨)

بما أن عدد الترتيبات المختلفة لـ k من العناصر يساوي $k!$ (انظر: المسألة السابقة) فإن ذلك يقترح أن عدد الطرق المختلفة لاختيار m من العناصر يساوي $k!$ أيضًا.

من الواضح وجود خطأ ما في هذا التبرير لأن الإجابة $k!$ لا تعتمد على m.

الخطأ هنا هو اعتبارنا أن الترتيبات المختلفة لأول m من العناصر على أنها مختلفة (انظر : الشكل رقم ٩) لكننا لا نريد أن نعتبرها مختلفة، لهذا فإننا نقوم بقسمة $k!$ على عدد الترتيبات المختلفة لمجموعة عدد عناصرها m ، أي نقسم على $m!$. وبالمثل، حسبنا الترتيبات المختلفة لباقي العناصر (عددها $k-m$) على أنها مختلفة. لذا يجب أن نقسم أيضًا على عدد ترتيبات هذه العناصر وهو $(k-m)!$. الآن، نكون قد توصلنا إلى خطة عد صائبة وقمنا بإيجاد عدد المجموعات الجزئية المختلفة المكونة من m عنصر من مجموعة عدد عناصر k . واكتشفنا أن هذا العدد هو:



شكل رقم (٩)

$$\frac{k!}{m!\times(k-m)!}$$

لاحظ أننا اتبعنا أيضًا الإستراتيجية التالية للوصول إلى الصيغة التالية أعلاه: وجدنا جميع ترتيبات k من العناصر وقمنا باختيار أول m من هذه العناصر. لكننا يجب أن نقسم على عدد الترتيبات المختلفة لأول m من العناصر ونقسم أيضًا على عدد الترتيبات المختلفة لبقية العناصر وعددها $k-m$. □

تستخدم الصيغة $\frac{k!}{m!\times(m-k)!}$ بصورة واسعة في مسائل العد وتسمى "من

k اختار m" وتكتب $\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$. إذن، لدينا

$$\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

مسألة (١,٣,٤)

ما عدد طرق اختيار 5 أوراق لعب من مجموعة أوراق اللعب التي عددها 52؟

الحل:

هذه مسألة سهلة بعد أن قمنا بحل المسألة السابقة، لأن هذه العدد هو "اختار 5 من 52" ويساوي:

$$\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{52!}{5! \times 47!} = 2598960.$$ □

مسألة (١,٣,٥)

ما عدد التوزيعات المختلفة بين لاعبَيْن في لعبة البريدج المأخوذة من مجموعة أوراق لعب عددها 52؟

الحل:

لعبة البريدج هي لعبة ورق بين لاعبَيْن يوزع لكل منهما 13 ورقة. نأخذ أولاً أحد اللاعبين. توزع على هذا اللاعب 13 ورقة من مجموعة مكونة من 52 ورقة. إذن، عدد التوزيعات الممكنة لهذا اللاعب هو:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 52 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{52!}{13! \times 39!}$$

الآن يوزع على اللاعب الثاني 13 ورقة أيضاً من الأوراق المتبقية وعددها 39 [لاحظ أن توزيع الأوراق بين اللاعبين في لعبة البريدج لا يتم بتوزيع 13 ورقة على اللاعب الأول ثم 13 على اللاعب الثاني، لكن الترتيب الذي يتم به توزيع الأوراق هنا

ليس مهمـًا، والمهم فقط هو أن اللاعب الأول سيأخذ 13 ورقة عشوائيـًّا ويأخذ أيضـًا اللاعب الثاني 13 ورقة أخرى عشوائيًّا]. إذن عدد التوزيعات الممكنة للاعب الثاني هو:

$$C_2 = \binom{39}{13} = \frac{39!}{13! \times 26!}$$

وبهذا فإن عدد التوزيعات الممكنة للاعبي البريدج هو:

$$C_1 \times C_2 = \binom{52}{13} \times \binom{39}{13} = \frac{52!}{13! \times 39!} \times \frac{39!}{13! \times 26!} \approx 5.1578 \times 10^{21}. \quad \square$$

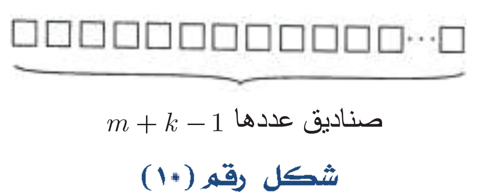
مسألة (١,٣,٦)

لنفرض أن k و m عددان صحيحان موجبان. ما عدد وحيدات الحدود (monomials) المختلفة من الدرجة m في الفضاء $\mathbb{R}^k$ ؟

قبل أن نقدم حلاً لهذه المسألة سنوضح ما نقصده بوحيدات الحدود. يتكون الفضاء $\mathbb{R}^k$ من عناصر على الصورة $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ حيث $x_1, x_2, \ldots, x_k$ أعداد حقيقية. وحيدة الحدود هي صيغة مثل، $x_1^2 \times x_3^3 \times x_5^6$. أي أنها صيغة مكونة من حاصل ضرب بعض القوى لبعض المتغيرات. درجة وحيدة الحدود أعلاه تساوي 11 لأن $2+3+6=11$. المطلوب هنا هو إيجاد عدد وحيدات الحدود من درجة معطاة m في الفضاء $\mathbb{R}^k$.

الحل:

نقدم هنا أسلوب عد جديد. لنفرض أن لدينا $m+k-1$ صندوقـًا (انظر: شكل رقم ١٠).



شكل رقم (١٠)

نقوم بتظليل أي $(k-1)$ من هذه الصناديق. بعد ذلك يتبقى m من هذه الصناديق غير مظلل وبأي ترتيب (انظر : شكل رقم ١١).



صناديق مظللة عددها $k-1$
وصناديق غير مظللة عددها m

شكل رقم (١١)

يوجد بين الحافة في أقصى يسار جميع الصناديق وأول صندوق مظلل مجموعة من الصناديق غير المظللة وليكن عددها m_1. لاحظ أن $0 \leq m_1 \leq m$. يوجد أيضاً على يمين أول صندوق مظلل ويسار ثاني صندوق مظلل، مجموعة من الصناديق غير المظللة وليكن عددها m_2. استمر على هذا المنوال.

نقول إن عدد $k-1$ من الصناديق المظللة يؤدي إلى أعداد صحيحة غير سالبة $m_1, m_2, \ldots, m_k$ حيث $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$. وهذا العديد من النوع k لهذه الأعداد يقابل وحيدة حدود:

$$x_1^{m_1} \times x_2^{m_2} \times \cdots \times x_k^{m_k}$$

وبالعكس، أي وحيدة حدود $x_1^{m_1} \times x_2^{m_2} \times \cdots \times x_k^{m_k}$ تقابل عديداً من الأعداد $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ من النوع k وهذا العدد يقابل $(k-1)$ من الصناديق المظللة من بين $m+k-1$ صندوق. الشكل رقم (١٢) يوضح الصناديق المظللة التي تقابل $x_1^2 \times x_3^3 \times x_5^6$ في الفضاء $\mathbb{R}^6$.

شكل رقم (١٢)

مما سبق نرى أن إيجاد عدد وحيدات الحدود من الدرجة m في الفضاء $\mathbb{R}^k$ يقابل عدد الطرق المختلفة لتظليل (اختيار) $k-1$ من الصناديق من بين

$m+k-1$ صندوق. لاحظ عدم وجود معلومات زائدة أو غامضة هنا. إذن، عدد وحيدات الحدود هو:

$$\binom{m+k-1}{k-1} = \frac{(m+k-1)!}{k-1\ !\times m!}$$

□

(١.٤) استخدام الاستقراء The Use Of Induction

يعدُّ الاستقراء الرياضي من أهم أساليب البراهين الرياضية. وقبل أن نقدمه، لابد من توضيح الفرق بين استخدام "الاستقراء" في حقول العلوم الإنسانية وبين استخدام "الاستقراء الرياضي" في الرياضيات.

تعتمد معظم الموضوعات العلمية على الاستقراء. فالكيميائي والفيزيائي أو عالم الأحياء يختبر عددًا من حالات ما ظاهرة، ومن ثم يحاول استقراء قاعدة عامة أو رأي من هذه البيانات. يأخذ الوصول إلى قاعدة عامة باستخدام البيانات أشكالاً عديدة لأن القاعدة ليست معروفة مسبقًا. كما أن اختبار صواب هذه القاعدة يحتاج إلى تجارب وتجميع بيانات جديدة.

أما "الاستقراء الرياضي" فمجاله محدود وتتم معالجته بطريقة واضحة المعالم. لتوضيح كيفية استخدام الاستقراء الرياضي نفرض أن $P(k)$ عبارة لكل عدد صحيح موجب k. على سبيل المثال، "$k^2-2k+1\geq 0$" أو "يمكن كتابة العدد $2k+4$ كمجموع عددين أوليين فرديين". تستخدم طريقة الاستقراء الرياضي لبرهان صواب $P(k)$ لكل k على الشكل التالي:

(أ) إثبات صواب $P(1)$.

(ب) إثبات صواب $P(j)\Rightarrow P(j+1)$ لكل $j\in 1,2,3,\dots$.

بعد إثبات صواب العبارتين نلاحظ ما يلي: باستخدام (أ) و (ب) عند $j = 1$ نحصل على $P(1)$ و $P(2)$. ومن ذلك نحصل على صواب $P(2)$. الآن، بتطبيق (ب) عند $j = 2$ نجد أن $P(2) \Rightarrow P(3)$. ومن ذلك ومن صواب $P(2)$ نرى أن $P(3)$ صائبة. وبالاستمرار، نحصل على صواب $P(k)$ لكل عدد صحيح موجب k.

إن هذا النقاش لتبرير صواب طريقة الاستقراء الرياضي هو نقاش تنقصه الدقة لأن الإثبات الدقيق لصواب طريقة الاستقراء الرياضي يحتاج إلى نظرية المجموعات وإنشاء الأعداد الطبيعية ولا نستطيع الخوض في هذه التفاصيل في هذا الكتاب. والقارئ المهتم بهذه التفاصيل يستطيع أن يجدها في المرجعين [KRA1] و [SUP].

نقدم الآن بعض الأمثلة على الاستقراء الرياضي.

مسألة (١,٤,١)

أثبت صواب العبارة:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k = \frac{k + k^2}{2}$$

الحل:

لقد سبق وأن قدمنا حلاً لهذه المسألة بطريقة أخرى في البند (٢,١)حيث يمكن اعتبار الأسلوب الذي قدمناه لحلها على أنه أسلوب غير واضح المعالم. ولكن بمجرد أن نعتاد على استخدام الاستقراء الرياضي لحلِّ مثل هذه المسائل سنجد أنها طريقة حلّ معيارية.

عند استخدامنا طريقة الاستقراء (نستخدم هذا التعبير من الآن فصاعداً عوضاً عن التعبير الدقيق "الاستقراء الرياضي") يكون من الضروري عمل ذلك بخطوات منظمة.

أولاً: ما العبارة $P(k)$ المراد إثباتها؟ في مثالنا هذا العبارة هي:

$$1+2+3+\cdots+(k-1)+\mathrm{k}=\frac{k+k^2}{2}$$

لإثبات صواب $P(1)$ لاحظ أن $1=\frac{1+1^2}{2}$

الجزء المهم في طريقة الاستقراء هو الخطوة (ب). نفرض صواب $P(j)$. في مثالنا هذا نفرض صواب:

$$1+2+3+\cdots+j=\frac{j+j^2}{2} \qquad (*)$$

نستخدم ذلك لإثبات صواب العبارة عند $(j+1)$. ولهذا الغرض نضيف $(j+1)$ لطرفي $(*)$ لنحصل على:

$$1+2+3+\cdots+j+(j+1)=\frac{j+j^2}{2}+(j+1)$$

بالتبسيط نجد أن :

$$1+2+3+\cdots+(j+1)=\frac{j+j^2+2(j+1)}{2}$$

أو:

$$1+2+3+\cdots+(j+1)=\frac{(j+1)+(j+1)^2}{2}$$

وهذا هو بالضبط العبارة $P(j+1)$.

لاحظ أننا حصلنا على صواب $P(j+1)$ بفرض صواب $P(j)$. وهذا بالضبط الفقرة (ب) من طريقة الاستقراء.

وبهذا نكون قد أنهينا البرهان لأننا بمجرد أن نبرهن صواب الخطوتين (أ) و (ب) فإننا نكون قد برهنا صواب $P(k)$ لكل k. □

في بعض الأحيان يكون من المناسب أن نبدأ الاستقراء عند خطوة مختلفة عن الخطوة $j = 1$. في المسألة التالية نبدأ بالخطوة $j = 0$.

مسألة (٢,٤,١)

لنفرض أن S مجموعة عدد عناصرها k . أثبت أن عدد المجموعات الجزئية من S يساوي 2^k .

الحل:

نستخدم طريقة الاستقراء. تذكر أولاً أن A مجموعة جزئية من B إذا كان كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي أيضًا إلى B . على وجه الخصوص $\varnothing \subset A$ حيث $\varnothing$ هي المجموعة الخالية (المجموعة التي لا تحتوي على عناصر). أيضًا $A \subset A$.

الآن، عبارتنا الاستقرائية $P(k)$ هي "إذا كان عدد عناصر المجموعة S يساوي k فإن عدد مجموعتها الجزئية يساوي 2^k".

سنبدأ الاستقراء عند 0 عوضًا عن 1.

لإثبات الخطوة (أ)، لاحظ أنه إذا كانت $S = \{\,\} = \varnothing$ فإن المجموعة الجزئية الوحيدة من S هي S . إذن، عدد مجموعات S الجزئية هو $2^0 = 1$. وبهذا فإن $P(0)$ صائبة.

لإثبات الخطوة (ب)، نفرض أن $P(j)$ صائبة. هذا يعني أن أي مجموعة عدد عناصرها j يجب أن يكون عدد مجموعتها الجزئية 2^j . لنفرض الآن أن $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_j, s_{j+1}\}$ مجموعة عناصرها $(j+1)$. ولنفرض أن $S' = \{s_1, s_2, \ldots, s_j\}$. إذن عدد عناصر S' يساوي j . من فرضية الاستقراء يكون عدد مجموعات S' الجزئية يساوي 2^j . نقوم الآن بحساب المجموعات الجزئية من S .

من المؤكد أن أي مجموعة جزئية من S' هي مجموعة جزئية من S، وهذا يعطينا 2^j من مجموعات S الجزئية. أيضًا، إذا كانت A مجموعة جزئية من S' فإن $A \cup \{s_{j+1}\}$ مجموعة جزئية من S. وهذا أيضًا يعطينا 2^j مجموعة جزئية أخرى من S. لذا فإننا نحصل على $2^j + 2^j = 2^{j+1}$ مجموعة جزئية من S. لاحظ أن هذه هي جميع المجموعات الجزئية من S لأن أي مجموعة جزئية من S إما أنها تحتوي s_{j+1} أو لا تحتوي s_{j+1}. وبهذا نكون قد برهنا صواب $P(j+1)$ من صواب $P(j)$. وهذه هي الفقرة (ب) من طريقة الاستقراء ونكون قد أنهينا البرهان. □

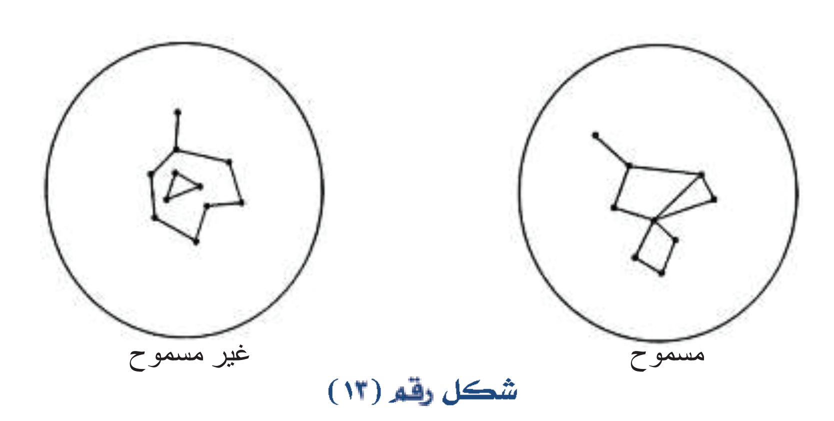
مسألة (١,٤,٣)

لنفرض أن لدينا رسمًا مسموحًا (admissible graph)* على كرة الوحدة في الفضاء ثلاثي البُعد. نعني هنا "برسم مسموح"، أقواس مترابطة. كل قوسين يتصلان ببعضهما فقط عند نقطتي نهايتيهما. تسمى نقاط نهايات الأقواس في الرسم رؤوسًا (vertices) وتسمى الأقواس أضلاعًا(edges). أي أن الضلع هو جزء من قوس يقع بين رأسين. تسمى المنطقة في المستوى الذي لا تحتوي على ثقوب ومحدودة بأضلاع ورؤوس وجهًا (face). الشكل رقم (١٣) يزودنا برسم مسموح وآخر غير مسموح.

المسألة هنا هي إثبات صيغة أويلر (Euler's formula) للرسومات المسموحة. ولهذا نفرض أن V عدد الرؤوس، E عدد الأضلاع، F عدد الوجوه. عندئذ، صيغة أويلر هي:

$$V - E + F = 2$$

* المترجمان: الاسم الشائع لهذه الرسومات هو رسومات مترابطة مستوية.

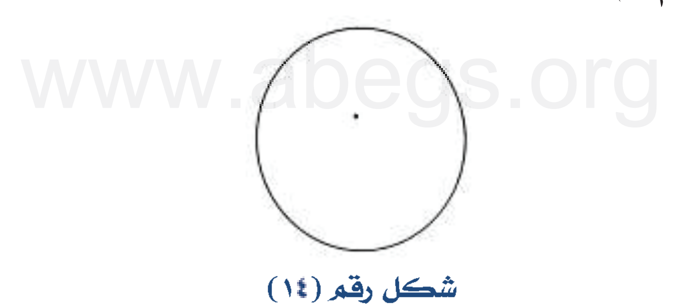


شكل رقم (١٣)

الحل:

نبدأ بدراسة حالات خاصة للتأكد من استيعابنا لما هو مطلوب في المسألة.

أبسط رسم مسموح حسب تعريفنا يتكون من رأس واحد ولا شيء غير ذلك (انظر الشكل رقم ١٤).



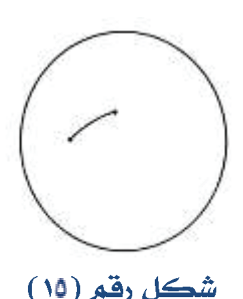
شكل رقم (١٤)

متتم الرأس في الكرة هو وجه. إذن، $V=1$ ، $E=0$ ، $F=1$ ويكون

$$V-E+F=1-0+1=2$$

ومن ثم فإن صيغة أويلر محققة.

الرسم المسموح الذي يأتي بعد ذلك يحتوي على ضلع ورأس عند كل طرف من طرفي الضلع ولا شيء آخر. متمم هذا الضلع في الكرة هو وجه مسموح (انظر: رقم شكل ١٥).



شكل رقم (١٥)

إذن، في هذه الحالة لدينا $V = 2$، $E = 1$، $F = 1$ ويكون:

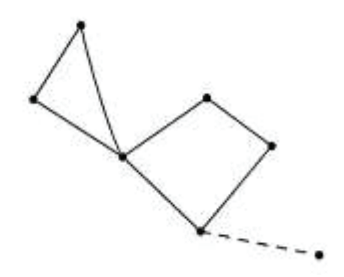
$$V - E + F = 2 - 1 + 1 = 2$$

ومن ثم فإن صيغة أويلر محققة في هذه الحالة.

نفرض الآن أن $P(k)$ هي "صيغة أويلر محققة لجميع الرسومات المسموحة التي عدد أضلاعها k". سنستخدم الاستقراء لبرهان صواب $P(k)$ لكل k. لقد سبق وأن تحققنا من صواب $P(1)$ ومن ثم فإن الفقرة (أ) من الاستقراء صائبة.

لبرهان الفقرة (ب)، نفرض أن صيغة أويلر محققة لجميع الرسومات المسموحة التي عدد أضلاعها j. الآن، نفرض أن G رسم عدد أضلاعه $(j+1)$. لاحظ أنه يمكن حذف ضلع من G بحيث يكون الرسم المتبقي G' رسماً مسموحاً (على سبيل المثال؛ حذف ضلع بين وجهين مختلفين). لنفرض أن V'، E'، F' هي عدد رؤوس، أضلاع، وجوه الرسم G'. نجد الآن العلاقة بين هذه الأعداد والأعداد V، E، F المقابلة لها في الرسم G.

لنحصل على الرسم G من الرسم G' (لاحظ أننا نعكس إنشاء G') بإضافة ضلع. إذا ارتبط الضلع المضاف برأس من أحد طرفيه وبقي الطرف الآخر حراً (الضلع المضاف هو الضلع المنقط في الشكل رقم ١٦) فإن عدد الوجوه يبقى كما هو، يزداد عدد الأضلاع بمقدار 1، يزداد عدد الرؤوس بمقدار 1. إذن،

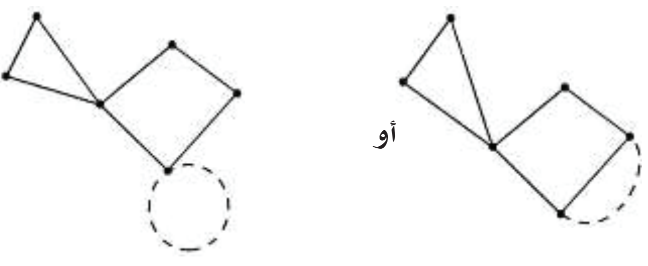


شكل رقم (١٦)

$V = V' + 1$ ، $E = E' + 1$ ، $F = F'$.

ولكن لدينا من فرضية الاستقراء $V' - E' + F' = 2$. لهذا فإن $V - E + F = 2$ كما هو المطلوب.

أما إذا كان الضلع المضاف مرتبطًا من طرفيه (مرة أخرى الضلع المضاف هو الضلع المنقط في الشكل رقم (١٧)، ونحصل على حالتين هنا كما هو مبين) فإن عدد الوجوه يزداد بمقدار 1، عدد الأضلاع يزداد بمقدار 1، عدد الرؤوس يبقى كما هو.



شكل رقم (١٧)

إذن، $V = V'$ ، $E = E' + 1$ ، $F = F' + 1$. ومن الفرض لدينا $V' - E' + F' = 2$. إذن، $V - E + F = 2$.

وبما أن هاتين الحالتين هما الحالتان الممكنتان لإضافة ضلع جديد فإننا نكون قد برهنا صواب الفقرة (ب) من الاستقراء ومن ثم ينتهي البرهان. □

مسألة (١،٤،٤)

لنفرض أن k عدد صحيح موجب. إذا وضعنا $(k+1)$ رسالة في صناديق عددها k فأثبت أن أحد الصناديق يحتوي على رسالتين على الأقل.

الحل:

يوجد العديد من الحلول لهذه المسألة، لكننا نستخدم طريقة الاستقراء لغرض توضيح الطريقة.

العبارة $P(k)$ هي "إذا وضعنا $(k+1)$ رسالة في صناديق عددها k فيوجد صندوقًا يحتوي على رسالتين على الأقل".

في الحالة $k=1$، لاحظ أن عدد الرسائل هو $k+1=2$ وأن عدد الصناديق $k=1$. إذن، من الواضح وجود صندوق (في الحقيقة الصندوق الوحيد) يحتوي على رسالتين (في الحقيقة جميع الرسائل).

لنفرض الآن أننا أثبتنا صواب $P(j)$. ولنفرض أننا وضعنا $(j+1)+1$ رسالة في صناديق عددها $(j+1)$.

- إذا كان الصندوق الأخير فارغًا فإننا نكون قد وضعنا جميع الرسائل في أول j من الصناديق. لذا، فعلى الأقل $(j+1)$ (في الحقيقة $(j+2)$) رسالة وضعت في أول j من الصناديق. وبتطبيق فرضية الاستقراء يحتوي أحد هذه الصناديق (أول j صندوق) على رسالتين على الأقل.
- إذا وضعت رسالة واحدة فقط في الصندوق الأخير فإن باقي الرسائل وعددها $(j+1)$ ستوضع في أول j من الصناديق. مرة أخرى نستطيع تطبيق فرضية الاستقراء على أول j من الصناديق ليحتوي أحدها على رسالتين على الأقل.
- إذا وضعت رسالتين أو أكثر في الصندوق الأخير فإن العبارة صائبة لوجود صندوق (بالتحديد الأخير) سيحتوي على رسالتين على الأقل.

وبهذا نكون قد برهنا المطلوب من المسألة. □

المبدأ الذي أثبتناه في المسألة الأخيرة هو أحد أهم المبادئ المستخدمة في الرياضيات ويطلق عليه عادة "مبدأ برج الحمام - pigeonhole principle". وكان اسمه في الأساس "مبدأ دريشليه لإقفال الجارور - Dirichlet drawer shutting principle" لأن أول منْ نص عليه هو العالم الألماني بيتر جوستاف ليجوان دريشليه الذي عاش بين العامين 1805 إلى 1859.

في البند القادم، نتعلم كيفية البرهان بالتناقض. وكتمرين على ذلك يكون بمقدورنا تقديم إثبات سهل لمبدأ برج الحمام باستخدام البرهان بالتناقض.

مسألة تحدي (١,٤,٥)

تتواجد مجموعة من الأشخاص في إحدى الحفلات حيث تصافح العديد منهم. أثبت أن عدد الأشخاص الذين صافح كل منهم عددًا فرديًّا من الأشخاص الآخرين هو عدد زوجي.

مسألة (١,٤,٦)

يتواجد ستة أشخاص في غرفة. أثبت أنه إما يوجد ثلاثة أشخاص من بينهم، جميعهم يعرفون بعضهم البعض أو يوجد ثلاثة أشخاص من بينهم لا يعرفون بعضهم البعض.

الحل:

من الواضح أنه إذا كان A يعرف B فإن B يعرف A وبالعكس.

لنفرض أن الأشخاص الستة هم A, B, C, D, E, F . اختر أحدهم وليكن A .

الآن، إما أن A يعرف ثلاثة أشخاص من الخمسة الباقية أو أنه لا يعرف ثلاثة أشخاص من الخمسة الباقين.

نفرض أن A يعرف ثلاثة أشخاص وهم B, C, D . الآن، إذا كان اثنان من هؤلاء الثلاثة أشخاص يعرفان بعضهم البعض ولنفرض أنهما B, C فإن A, B, C

ثلاثة أشخاص يعرفون بعضهم البعض. أما إذا كان الثلاثة أشخاص B, C, D لا يعرفون بعضهم البعض فمن الواضح أنهم الثلاثي المطلوب الذين لا يعرفون بعضهم البعض. □

مسألة تحدي (١، ٤، ٧)

يمكن إعادة صياغة المسألة السابقة على النحو التالي:

لنفرض أن علّمنا 6 نقاط على قطعة من الورق*. لونا كلاً من القطع المستقيمة الممكنة بين كل نقطتين منها (عدد هذه القطع يساوي 15) بأحد اللونين، أحمر وأزرق. أثبت وجود مثلث تكون جميع أضلاعه من اللون الأحمر أو جميع أضلاعه من اللون الأزرق. بيّن أيضاً لماذا هذه الصياغة تكافئ الصياغة الأصلية للمسألة.

مسألة تحدي (١، ٤، ٨)

بالرجوع إلى المسألة السابقة ومسألة التحدي السابقة. لنفرض الآن أن لدينا ثلاثة ألوان لتلوين القطع المستقيمة هي أحمر، أزرق، أصفر وأن لدينا ست نقاط. أثبت استحالة وجود مثلث بحيث تأخذ جميع أضلاعه اللون نفسه. كم عدد النقاط التي تحتاجها للحصول على مثلث جميع أضلاعه ملونة بلون واحد؟

مسألة تحدي (١، ٤، ٩)

تعميم لمسألة التحدي السابقة. لنفرض أن لدينا عدد k من الألوان. كم عدد النقاط اللازمة للحصول على مثلث جميع أضلاعه تأخذ أحد الألوان السابقة على افتراض تلوين كل من القطع المستقيمة الناشئة عن هذه النقاط بأحد الألوان الموجودة.

---

* المترجمان: حيث لا توجد أي ثلاثة منها على استقامة واحدة.

(١,٥) مسائل في المنطق Problems of Logic

مع أن بعض المسائل التي نقدمها ذات طبيعة هندسية أو مسائل عد أو مسائل تحليلية، إلا أن المنطق يلعب دورًا ما في حل جميع هذه المسائل. نقدم في هذا البند مسائل بحيث يكون للمنطق الدور الأساسي في صياغتها وحلّها. نبدأ بمسألة من المسائل التقليدية التي نطلق عليها "مسائل الكذب والصدق".

مسألة (١,٥,١)

وصلت إلى جزيرة ينقسم جميع سكانها إلى نمطين: نمط صادق دائمًا ونمط كاذب دائمًا. عند طرح سؤال إجابته نعم أو لا ستكون إجابة النمط الصادق صحيحة وإجابة النمط الكاذب خاطئة. لا توجد طريقة مباشرة لتعرّف الشخص الكاذب من الشخص الصادق. ما السؤل الممكن طرحه على أي شخص من سكان الجزيرة لتعرّف فيما إذا كان هذا الشخص صادقًا أم كاذبًا؟

الحل:

إذا سألت سؤالاً مباشرًا مثل: "هل أنت من النمط الصادق؟". فإن الشخص من النمط الصادق سيجيب بـ"نعم" والشخص من النمط الكاذب سيجيب بـ"نعم" (لأنه كاذب دائمًا). وسنحصل على إجابة مماثلة لو كان السؤال "هل أنت من النمط الكاذب؟". لذا فإن سؤالاً بسيطًا لن يميز بين النمطين.

من ذلك نرى الحاجة إلى سؤال مركب نستخدم فيه أداة "الشرط" أو "الفصل" أو "العطف". أحد الأساسيات التي نتعلّمها في مقرر منطق أساسي أنه يمكن إعادة صياغة السؤال الذي يستخدم أي من أدوات الربط الثلاث أعلاه إلى سؤال مكافئ يستخدم أي من أدوات الربط الأخرى (انظر: [KRA1]). سنقدم سؤالاً شرطيًّا "إذا كان....فإن..." ونبين أنه سيفي بالغرض.

من الممكن أن تكون صياغة السؤال على النحو التالي: "إذا كان الجو ماطرًا فما

الذي تستطيع قوله عن ..." أو "إذا كنت أستاذًا في الحروف فماذا ستكون إجابتك عن..". ولكن من الواضح أن هذه الأسئلة الشرطية ليس لها علاقة في الموضوع.

على الأرجح من الممكن أن يكون السؤال على النحو التالي: "إذا كنت من النمط الصادق فماذا تقول عن ..." أفضل. وأيضًا تكون نتيجة السؤال لها علاقة مع موضوع المسألة التي نحاول حلها. ولذا سنحاول طرح السؤال التالي:

إذا كنت من النمط الصادق فماذا ستكون إجابتك عن "هل أنت من النمط الكاذب ؟".

سنحاول الآن تحليل إجابات نمطي سكان الجزيرة عن هذا السؤال.

من الواضح أن إجابة الشخص من النمط الصادق ستكون "لا". لذا فإذا طرحت السؤال على شخص من النمط الصادق فسيكون صادقًا ويجيب عن السؤال بـ "لا". أما تفكير النمط الكاذب فسيكون بوضوح تفكير النمط الصادق. أي أنه يعلم أن إجابة النمط الصادق عن مثل هذا السؤال ستكون "لا"، لكنه يعلم أنه يجب أن تكون إجابته كاذبة وبهذا فإنه سيجيب عن السؤال بـ"نعم".

إذن، نكون قد وجدنا السؤال الملائم الذي سيجيب عنه النمط الصادق "لا" ويجيب عنه النمط الكاذب بـ"نعم". وبهذا نستطيع التفريق بين النمطين من الأشخاص. □

يمكنك الآن محاولة تعديل السؤال الذي طرحناه في المسألة السابقة وترى النتيجة التي ستحصل عليها. على سبيل المثال؛ حاول التعديل في السؤال ليكون على النحو التالي: "إذا كنت من النمط الكاذب فما إجابتك عن السؤال: "هل أنت من النمط الصادق؟". توجد صيغ أخرى للسؤال يمكن تجريبها. ماذا ستكون النتيجة لو طرحت السؤال "هل أنت ديك ؟".

المسألة التالية من مسائل السّياق نفسه نطرحها كمسألة تحدي.

مسألة تحدي (١,٥,٢)

أنت في الجزيرة التي سكانها إما من النمط الصادق دائماً أو النمط الكاذب دائماً. صادفت شخصين من سكانها A و B. ما السؤال الممكن طرحه على A الذي يجب أن تكون إجابته "نعم" أو "لا" بحيث تحدد إجابته نمط الشخص B (أي هل B من النمط الصادق أم من النمط الكاذب)؟

مسألة تحدي (١,٥,٣)

ينقسم سكان جزيرة إلى ثلاثة أنماط، نمط يقول الصدق دائماً، ونمط يقول الكذب دائماً، ونمط يقول الكذب أحياناً ويقول الصدق في أحيان أخرى. لا يمكن التفريق بين الأنماط من المظهر الخارجي. إذا التقيت بأحد سكان الجزيرة فما السؤال الذي تطرحه عليه بحيث تمكنك إجابته من تحديد النمط الذي ينتمي إليه هذا الشخص؟

نالت المسألة التالية شهرة إعلامية في السنوات القليلة الماضية. الحافز من وراء هذه المسألة هو برنامج مسابقات تليفزيوني "دعنا نعقد صفقة". يمكن تبسيط المسابقة على النحو التالي: يواجه المتسابق ثلاثة أبواب، خلف أحد هذه الأبواب جائزة قيمة ولتكن سيارة، وخلف كل من البابين الآخرين جائزة بسيطة ولتكن ماعز. على المتسابق اختيار أحد الأبواب عشوائياً والحصول على الجائزة التي خلف هذا الباب. ولكن مقدم البرنامج مونتي هول (Monty Hall) يبدأ بمداعبة وإغراء وتشجيع المتسابق على استبدال خياره مما يثير شك لدى المتسابق فيما إذا كان خياره هو الأفضل.

المسألة التي أصبحت تعرف بمسألة مونتي هول هي: يقوم المتسابق باختيار أحد الأبواب ولنفرض (دون المساس بالعمومية) أن هذا الباب هو الباب 3 . قبل فتح هذا الباب يقول مونتي هول: "سأقوم الآن بفتح أحد البابين الآخرين لترى الجائزة الموجودة خلفه". بعد ذلك يفتح باباً من البابين لتظهر ماعز خلف هذا الباب. الآن، يسأل مونتي هول المتسابق: "هل تريد تغير اختيارك للباب؟".

من الواضح أن المتسابق لن يحتاج الباب الذي فتحه مونتي هول لأن الجائزة التي خلفه ماعز. لذا فالخيار هو فيما إذا كان المتسابق يرغب في التخلي عن الباب الذي اختاره ومن ثم يختار الباب المقفل الآخر. يبدو من الظاهر أن احتمال وجود سيارة خلف الباب الذي اختاره المتسابق يساوي احتمال وجود سيارة خلف الباب الذي لم يقم مونتي هول بفتحه لأن لدينا بابين خلف أحدهما سيارة وخلف الآخر ماعز. إذن، ما الهدف من تغيير الخيار؟ ولكن هذا التحليل لم يأخذ بالاعتبار حقيقة وجود معزتين مختلفتين في الأساس. التحليل الذي نقدمه في حل المسألة للحالات الممكنة سيؤدي إلى نتيجة غير متوقعة.

مسألة (٤,٥,١)

ادرس جميع الحالات الممكنة لحلِّ مسألة مونتي هول.

الحل:

نرمز للمعزتين بالرمزين G_1، G_2 وللسيارة بالرمز C. وللسهولة سنفرض أن المتسابق يختار الباب رقم 3 بداية. ولكننا لا نستطيع افتراض أن مونتي هول قد فتح الباب رقم 1 لأنه من الممكن لا توجد ماعز خلف الباب رقم 1 بل أن تكون الماعز خلف الباب رقم 2. ولهذا لدينا الحالات التالية:

الباب 1	الباب 2	الباب 3
G_1	G_2	C
G_2	G_1	C
G_1	C	G_2
G_2	C	G_1
C	G_1	G_2
C	G_2	G_1

هذه هي جميع الحالات الممكنة لأننا نعلم من البند (٤,١) أن عدد التبديلات المختلفة لمجموعة مكونة من 3 عناصر هو $3! = 6$.

(١) في هذه الحالة، مونتي هول سيجد ماعز خلف الباب 2. ولذا ليس من صالح المتسابق تغيير اختياره. سنرمز لذلك بالرمز N.

(٢) هذه الحالة مشابه للحالة (١). ولذا N.

(٣) في الحالة مونتي هول يفتح الباب 1 الذي خلفه الماعز ومن ثم يكون في صالح المتسابق تغيير خياره. ونرمز لذلك بالرمز Y.

(٤) مماثل للحالة (٣) ولذا يكون في صالح المتسابق تغيير خياره. إذن، Y.

(٥) هنا يفتح مونتي هول الباب رقم 2 ويكون في صالح المتسابق تغيير خياره. إذن، Y.

(٦) في هذه الحالة يفتح مونتي هول الباب رقم 2 ويكون في صالح المتسابق تغيير خياره إذن، Y.

لاحظ أننا حصلنا على 4 حالات Y وحالتين N. لذا فإن تغيير المتسابق للباب الذي اختاره يكون في صالحه وذلك بعد فتح مونتي هول لباب خلفه ماعز. □

المسألة السابقة هي مسألة ذات طبيعة احتمالية. يمكن حل العديد من مسائل الاحتمالات البسيطة بدراسة الحالات المختلفة أو بطرق العد. نقدم المزيد من مسائل الاحتمالات في الفصلين 3 و 8.

مسألة (١.٥.٥)

عدد الراشدين أكبر من عدد الصبيان وعدد الصبيان أكبر من عدد البنات وعدد البنات أكبر من عدد العائلات (العائلة هنا زوج وزوجة). لا توجد عائلة عدد أطفالها أصغر من 3. ما أصغر عدد من العائلات التي تحقق جميع هذه الشروط؟

الحل:

إذا كان عدد العائلات يساوي 1 فإنه يجب أن يوجد: بنتان على الأقل، 3 صبيان على الأقل، 4 راشدين على الأقل. لكن 4 راشدين يكونون عائلتين، وبهذا نحصل على تناقض.

إذا كان عدد العائلات يساوي 2 فإنه يجب أن يوجد: 3 بنات على الأقل، و 4 صبيان على الأقل، 5 راشدين على الأقل. ولكن وجود خمس راشدين يعني وجود أكثر من عائلتين ومن ثم ثلاث عائلات على الأقل وهذا تناقض.

إذا كان عدد العائلات 3 فإنه يجب أن يوجد 4 بنات على الأقل، و 5 صبيان على الأقل، 6 راشدين على الأقل وهذا ممكن. إذن، لا يوجد تناقض هنا. لذا فإن وجود ثلاث يمكن أن يحقق الشرط.

في الحقيقة، إذا كان لدينا ثلاث عائلات حيث يوجد لدى العائلة الأولى بنتان وصبي ولدى العائلة الثانية بنتان وصبي ولدى العائلة الثالثة ثلاثة صبيان فإنه يوجد 6 راشدين، 5 صبيان، 4 بنات، 3 عائلات. ومن ثم فالشروط جميعها محققة. إذن، أصغر عدد من العائلات التي تحقق الشروط هو 3. □

طريقة الحل المستخدمة في حل المسألة السابقة تسمى طريقة "الاستنفاد-exhaustion" . لاحظ أن هذه الطريقة ليست عملية إذا كانت إجابة المسألة 357 لأن التحقق من جميع الحالات يستغرق وقتًا كبيرًا نسبيًا، ومع ذلك فمن المهم أن نعرف وجود طريقة الاستنفاد كإحدى طرائق حلول المسائل.

مسألة (١،٥،٦)

أثبت أن عدد الأعداد الأولية غير منته.

الحل:

العدد الأولي هو عدد صحيح موجب أكبر من 1 وله قاسمان فقط هما العدد 1 والعدد نفسه. جميع الأعداد $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$ أولية. كل عدد صحيح أكبر من 1 * يقبل القسمة على عدد أولي، في الحقيقة يمكن كتابته بطريقة وحيدة

* المترجمان: العدد الصحيح يجب أن يكون أكبر من 1 و لا يكفي أن يكون موجبًا لأن 1 عدد صحيح موجب ولا يقبل القسمة على عدد أولي.

(باستثناء الترتيب) كحاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية. وهذا هو فحوى المبرهنة الأساسية في الحساب(fundamental theorem of arithmetic).

البرهان الذي نقدمه لحلّ هذه المسألة هو البرهان بالتناقض أو البرهان غير المباشر (proof by contradiction or indirect proof).

لنفرض إذن، وجود عدد منته من الأعداد الأولية ولتكن $p_1, p_2, \ldots, p_k$. ولنفرض أن $N = (p_1 p_2 \ldots p_k) + 1$. أي أن N حاصل ضرب جميع هذه الأعداد مضافاً إليه العدد 1. الآن، يقبل N القسمة على عدد أولي (كما بينا في الفقرة السابقة) ولكن لا يقبل N القسمة على p_1 لأنه عند قسمة N على p_1 سيكون لدينا باقي 1. أيضاً لا يقبل N القسمة على p_2 لأنه عند قسمة N على p_2 سيتبقى أيضاً 1. في الحقيقة، لا يقبل N القسمة على أي من الأعداد الأولية $p_1, p_2, \ldots, p_k$. لكن هذه هي جميع الأعداد الموجودة و N يجب أن يقبل القسمة على عدد أولي! هذا هو التناقض المنشود. إذن، لا يمكن أن يكون عدد الأعداد الأولية منتهياً ومن ثم فهو عدد غير منته. □

مع أن طريقة "البرهان بالتناقض" هي طريقة سهلة، إلا أنها إحدى طرائق البرهان المهمة في الرياضيات والتبرير التحليلي. يتم تنفيذها على النحو التالي:

المطلوب إثبات صواب التقرير P. الآن، إما أن P صائب أو أنه خاطئ. لا يمكن أن نقول: "انتظر وسنرى" أو "يمكن أن يكون في حالة تقع بين الخطأ والصواب". يجب أن يكون في إحدى الحالتين (انظر: [KRA1] لمزيد من النقاش حول هذا المفهوم). إستراتيجية البرهان بالتناقض هو إثبات استحالة أن يكون P خاطئاً. لذا فإننا نفرض أن P خاطئ ونبين استحالة هذا الفرض (هذا هو التناقض). وبهذا فإن النتيجة الممكنة الوحيدة هي أن يكون P صائباً. هذا هو بالضبط ما بيناه عند حل المسألة (١،٥،٦).

يعزى برهان وجود عدد غير منته من الأعداد الأولية إلى إقليدس (Euclid) حيث

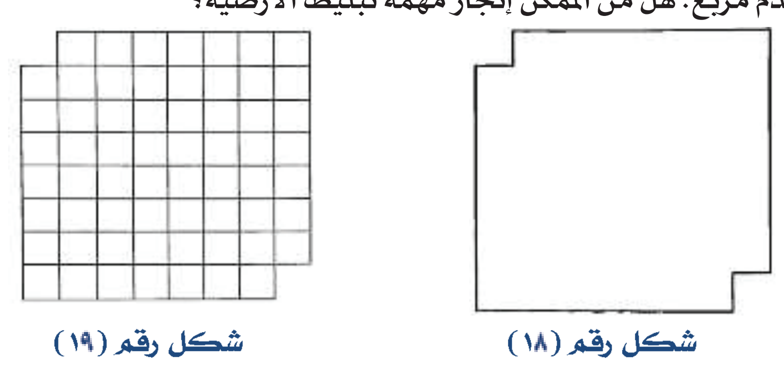
قدم إقليدس هذا البرهان قبل أكثر من 2000 عام، وكان هذا البرهان هو أول برهان بالتناقض. ومن الملفت للنظر أن الرياضيين لم يتقبلوا طريقة البرهان بالتناقض على أنها طريقة برهان اعتيادية قبل بداية القرن العشرين.

(١,٦) مسائل في النوعية Issues of Parity

أبسط أنواع الأمثلة على النوعية "فردي أو زوجي"، لكن هناك العديد من الأمثلة الأخرى. نقدم في هذا البند جوانب مختلفة من النوعية.

مسألة (١,٦,١)

أردنا تبليط أرضية حمام مربعة الشكل طول ضلعها 8 أقدام باستخدام بلاطات طولها 2 قدم وعرضها 1 قدم. توجد مغسلة في أحد أركان الحمام تحتل سباكتها مربعاً طول ضلعه 1 قدم من أرضية الحمام. في الركن المقابل، يوجد مرحاض وتحتل سباكته مربعاً طول ضلعه أيضاً 1 قدم من أرضية الحمام (انظر: الشكل ١٨). يبين الشكل رقم (١٩) تقسيم أرضية الحمام إلى مربعات مساحة كل منها 1 قدم مربع. هل من الممكن إنجاز مهمة تبليط الأرضية؟

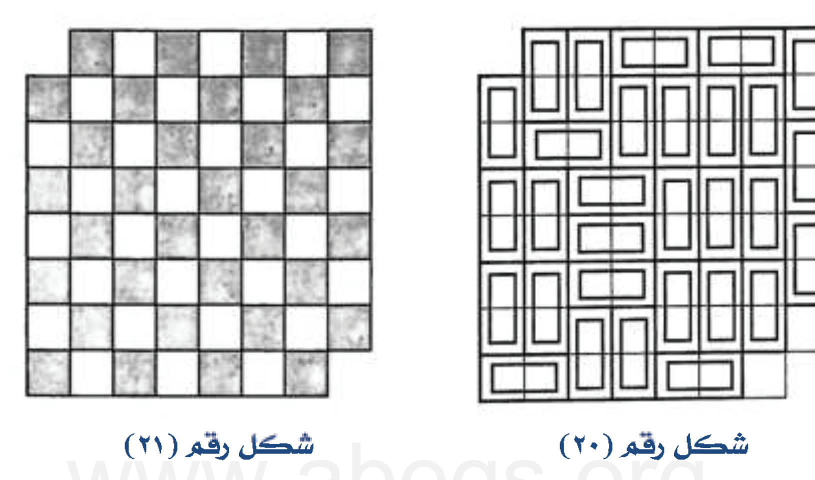


شكل رقم (١٨) شكل رقم (١٩)

الحل:

مساحة الأرضية المراد تبليطها هي $8 \times 8 - 1 \times 1 - 1 \times 1 = 62$ قدماً مربعاً. لذا فإننا نحتاج إلى 31 بلاطة (مساحة كل بلاطة 2×1 قدم مربع).

يبين الشكل رقم (٢٠) أحد الترتيبات الممكنة لوضع البلاطات (لاحظ أنها فشلت في تغطية الأرضية المراد تبليطها لأن مربعين في الأسفل لم يتم تبليطهما ومن غير الممكن استخدام بلاطة من النوع 1×2 لتغطيتهما).



شكل رقم (٢٠) شكل رقم (٢١)

وإذا جربنا محاولات أخرى فسنرى أنها تفشل في إنجاز المهمة (جرب ذلك باستخدام رقعة شطرنج مع وضع قطعة نقود على مربعين متقابلين).

في هذه اللحظة بدأنا في الشك في إمكانية إنجاز مهمتنا. ولكن كيف يمكننا إثبات استحالة تبليط أرضية الحمام بالشروط المعطاة؟ إذا أردنا تجريب جميع الخيارات فتوجد مئات عديدة من الحالات التي علينا تجريب كل منها وهذا غير ممكن. الفكرة التي نقدمها (تعتمد على النوعية) هي تلوين أرضية غرفة الحمام باللونين الأسود والأبيض كما في رقعة الشطرنج (انظر: الشكل رقم ٢١). لاحظ أن كل بلاطة من النوع 1×2 تغطي مربعين متجاورين أحدهما يجب أن يكون أبيض والآخر أسود. وإذا وضعنا بلاطتين فإنهما تغطيان مربعان من النوع الأبيض ومربعان من النوع الأسود. بصورة عامة، عدد k من البلاطات سيغطي k من المربعات البيضاء و k من المربعات السوداء. ولكن عدد المربعات من اللون الأبيض في أرضية الحمام يساوي 30 وعدد المربعات من اللون الأسود يساوي 32. وهذا يبين استحالة إنجاز المهمة. □

حصلنا على نوعية في المسألة السابقة باستخدام تلوين الأرضية، ومن دون هذا التلوين فإننا نحتاج إلى تبرير عدي معقد لحل هذه المسألة.

مسألة (١,٦,٢)

لدينا وعاء سعته 6 لترات ووعاء آخر سعته 4 لتر. يتم تعبئتهما بغمرهما في النهر. كيف يمكن أن نستخدمهما لوضع 3 لترات من الماء في أحدهما؟

الحل:

الخطوات المسموحة في هذه المسألة هي:

(أ) ملأ وعاء (ب) تفريغ وعاء (ج) تفريغ أحد الأوعية في وعاء آخر.

تتكون هذه الخطوات من جمع أو طرح مضاعفات للعددين 4 و 6. لكن جمع أو طرح عددين زوجين هو عدد زوجي. لهذا لا يمكن الحصول على عدد فردي 3. إذن المسألة مستحيلة الحلّ. □

مسألة تحدي (١,٦,٣)

لنفرض أن لدينا وعاء سعته 9 لترات وآخر سعته 4 لترات كيف يمكن استخدامها لوضع 6 لترات في الوعاء الكبير؟

استخدمنا النوعية في المسألتين السابقتين لإثبات استحالة الحصول على حل. والآن نستخدمها لإثبات وجود حل.

مسألة (١,٦,٤)

[ماسك-Masek] لدينا كثير وجوه عدد رؤوسه 1981 [من السهل تخيل ذلك].

ضع 1981 نقطة على كرة وحدة في الفضاء ثلاثي البُعد، وبعد ذلك صل بين هذه النقاط بقطع مستقيمة لتحصل على كثير الوجوه]. ولنفرض أننا قمنا بشحن كل من الأضلاع بشحنة $+1$ أو شحنة -1. بين وجود رأس بحيث يكون حاصل ضرب شحنات الأضلاع الواقعة عليه يساوي $+1$.

الحل:

لنفرض أننا ضربنا شحنات جميع الأضلاع الواقعة على جميع الرؤوس. عندئذ، حسبنا كل من الأضلاع مرتين (لأن كل ضلع واقع على رأسين). وبهذا نكون قد ضربنا عددًا زوجيًّا من $+1$ وعددًا زوجيًّا -1. ومن ثم فحاصل ضرب يساوي $+1$.

ولكن عدد الرؤوس فردي. ومن ذلك فلا يمكن أن يكون حاصل الضرب الذي نحصل عليه عند كل رأس هو -1 (حاصل ضرب عدد فردي من -1 يساوي -1). إذن، لا بد من وجود رأس واحد على الأقل حاصل ضرب الأضلاع الواقعة عليه يساوي $+1$.

مسألة (١,٦,٥)

بينما كان الجيران يتناولون عشاءهم في حديقة منزل أحدهم دخل عليهم قطيع من الأبقار مما أحدث فوضى وتدافع. بعد إحصاء الموجودين عدد الرؤوس 120 وعدد الأقدام 300. ما عدد الأشخاص وما عدد الأبقار؟

الحل:

لنفرض أن P هو عدد الأشخاص وأن C هو عدد الأبقار. عندئذ، عدد الرؤوس هو $P+C$ وعدد الأقدام هو $4C+2P$ (قدمان لكل شخص وأربعة أقدام لكل بقرة)

إذن،

$$C+P=120$$
$$4C+2P=300$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $C=30$ و $P=90$. □

مسألة تحدي (١,٦,٦)

لنفرض أن 10 من الأبقار في المسألة السابقة كانت عرجاء ولها ثلاثة أقدام. وأن عدد الرؤوس والأقدام بقيا كما هو 120 رأس و 300 قدم. ما عدد الأبقار وما عدد الأشخاص في هذه الحالة؟

مسألة (١,٦,٧) [هالموس- Halmos]

دعا السيد/ صلاح وزوجته السيدة/ نهى أخوين هما السيد/ صلاح الأربعة وزوجاتهم إلى مائدة عشاء. عند وصولهم إلى بيت السيد/ صلاح تمَّ العديد من المصافحات ولكن لم يصافح الجميع الجميع. لم يصافح شخص شخصًا آخر مرتين ولم يصافح زوج أو زوجة أحدهما الآخر. صافح السيد/ صلاح والسيدة/ نهى بعض الضيوف. بعد انتهاء العشاء سأل السيد/ صلاح كل من الأشخاص الموجودين عن عدد الأشخاص الذين صافحهم فكانت الإجابات جميعها مختلفة. كم عدد الأشخاص الذين صافحتهم السيدة/ نهى؟

الحل:

لنرمز بالرمز S للسيد/ صلاح وللسيدة/ نهى وللأزواج الأربعة الباقية بالرموز D, C, B, A. لا يوجد شخص صافح 9 أشخاص لأن ليس الجميع صافح الجميع. إذن، كل من الأشخاص التسعة (عدا السيد/ صلاح) قد صافح عددًا من الأشخاص يقع بين 0 و 8. أحد الأشخاص صافح 8 أشخاص وليكن A. الآن، ما عدد الأشخاص الذين صافحتهم A؟ كل شخص من بين الأزواج S, D, C, B قد صافحت السيدة/ A (السيدة/ A صافحت 8 أشخاص ولم تصافح زوجها). إذن كل من الأشخاص من بين الأزواج S, D, C, B قد صافح شخصًا واحدًا على الأقل. ولكن هناك شخص لم يصافح أحدًا. لذا فإن هذا الشخص يجب أن يكون السيدة/ A.

بعد أن علمنا عدد الأشخاص الذين صافحهم وصافحتهم السيد والسيدة A ننتقل إلى الشخص الذي صافح 7 أشخاص ولتكن السيدة/ B. نعلم أن السيدة/ B قد صافحت السيد/ A ولم تصافح السيدة / A. لذا، للحصول على 7 أشخاص صافحتهم السيدة/ B فإنه من المؤكد أنها صافحت جميع الأزواج S, D, C. ولكن أحد الأشخاص يجب أن يصافح شخصًا واحدًا فقط، وأن كل من الأزواج S, D, C صافح على الأقل شخصين هما السيد/ A والسيدة/ B. إذن، الشخص

الذي صافح شخصًا واحدًا فقط يجب أن يكون السيد/ B .

وبالاستمرار على هذا المنوال، نجد أن الشخص الذي صافح 6 أشخاص متزوج الشخص الذي صافح شخصين، وأن الشخص الذي صافح 5 أشخاص متزوج الشخص الذي صافح 3 أشخاص. وبهذا يتبقى لدينا السيدة/ S والتي تكون قد صافحت 4 أشخاص، وأن العدد 4 هو العدد الوحيد الذي لا يمكن ربطه مع عدد آخر. إذن، عدد الأشخاص الذين صافحتهم السيدة/ S هو 4 أشخاص. □

مسألة تحدي (١,٦,٨)

بالرجوع إلى المسألة السابقة، كيف يمكننا التحقق من أن السيدة/ S لا يمكن أن تكون قد صافحت 8 أشخاص؟

مسألة (١,٦,٩)

يستطيع خروف أكل جميع برسيم أحد الحقول في يوم واحد وتستطيع بقرة أن تأكل جميع برسيم الحقل نفسه في نصف يوم. كم من الوقت يستغرق أكل برسيم الحقل إذا تعاون الخروف والبقرة معًا على ذلك؟

الحل:

لاحظ أن البقرة تساوي خروفين (حسب نص المسألة). لذا فالخروف والبقرة يساويان 3 خرفان. وبهذا يستطيع ثلاث خرفان أكل برسيم الحقل في $\frac{1}{3}$ يوم. □

مسألة تحدي (١,٦,١٠)

يستطيع النَّو (ثور إفريقي كبير له قرنان معكوفان) أن يأكل برسيم حقل في يومين وتستطيع اللاما أكل برسيم الحقل نفسه في ثلاث أيام وتستطيع الماعز أكل برسيم الحقل نفسه في أربع أيام. ما الزمن اللازم لأكل برسيم الحقل إذا تعاون على ذلك ثلاثة حيوانات معًا؟

مسألة (١.٦.١١)

ما مرتبة (خانة) آحاد العدد 3^{4798} ؟

الحل:

من الواضح أن آخر شيء نفكر فيه هو حساب هذا العدد. حتى لو لجأنا إلى برنامج مثل MATHEMATICA فإننا سنواجه مشكلات مع سعة الذاكرة أو التخزين. لذا دعنا نفكر في طريقة للحل.

لاحظ أن $3^1 = 3$ ، $3^2 = 9$ ، $3^3 = 27$ ، $3^4 = 81$ ، $3^5 = 243$ وهكذا. لذا فإن مراتب الآحاد الممكنة هي $1,7,9,3$ (لأن النمط سيتكرر). من بين هذه القائمة المرتبة 1 مرتبة خاصة لأن $1 = 1 \times 1$ وأن 1 يظهر عند رفع العدد 3 إلى القوة 4. إن ذلك يقترح علينا كتابة العدد على الصورة

$$3^{4798} = (3^4)^{1199} \times 3^2$$

حصلنا على ذلك بقسمة 4798 على العدد 4 لنحصل على خارج قسمة 1199 وباقي 2، ومن ثم استخدمنا قوانين الأسس البدائية.

الآن، مرتبة آحاد 3^4 تساوي 1. ولذات فإن مرتبة آحاد $(3^4)^{1199}$ ستبقى 1. أما مرتبة آحاد 3^2 فهي 9. إذن، مرتبة آحاد العدد 3^{4798} تساوي 9. □

مسألة (١.٦.١٢) [صعبة]

ما آخر ثلاث مراتب في العدد 3^{4798} ؟

تمارين على الفصل الأول

(١) أثبت أن أي قوة صحيحة موجبة للعدد $(\sqrt{2}-1)$ يمكن كتابتها على الصورة $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$ حيث N عدد صحيح موجب [إرشاد: استخدم الاستقراء وعالج القوة الفردية والقوة الزوجية للعدد $(\sqrt{2}-1)$ كلاً على حده].

(٢) احسب مجموع أول k من الأعداد الفردية؟

(٣) احسب مجموع أول k من مكعبات الأعداد الصحيحة الموجبة.

(٤) أثبت أنه من بين 52 عددًا صحيحًا موجبًا مختلفة، يوجد عددان مختلفان يقبل مجموعهما أو الفرق بينهما القسمة على العدد 100.

(٥) جد جميع أزواج الأعداد الصحيحة m، n التي تحقق $m \times n = m + n$.

(٦) كم عدد الأصفار التي ينتهي بها العدد $(200!)$؟

(٧) كم عدد الأصفار التي ينتهي بها العدد $2^{300} \times 5^{600} \times 4^{400}$؟

(٨) توجد مجموعة من الأشخاص في غرفة. بعضهم صافح البعض الآخر وبعضهم لم يصافح أحدًا. ماذا يمكن القول عن عدد الأشخاص الذين صافحوا عددًا زوجيًا من الأشخاص الآخرين؟

(٩) كم مرتبة (خانة) نحتاج لترقيم صفحات كتاب عدد صفحاته 100 مرقمة من 1 إلى 100؟

(١٠) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة k التي تحقق الخاصية:
مرتبة آحاد $k!$ لا تساوي 0؟

(١١) لنفرض أن العدد الصحيح k مضاعف للعدد 9. اجمع جميع مراتبه. إذا كان المجموع عددًا مكونًا من أكثر من مرتبة واحدة. اجمع هذه المراتب. استمر على هذا المنوال حتى تحصل على عدد مكون من مرتبة واحدة. هذه المرتبة يجب أن تكون 9. هل تستطيع تبرير ذلك؟

(١٢) بالرجوع إلى التمرين رقم (١١). قدم التعليمات التالية لأحد الأصدقاء: اختر عدد صحيح من بين الأعداد 1 إلى 10. اضرب العدد بالعدد 9. اجمع مراتب الناتج. اطرح العدد 5. تحصل الآن على عدد مكون من مرتبة واحدة. اختر الآن الحرف المقابل لهذا العدد ($1 \leftrightarrow A$، $2 \leftrightarrow B$، $3 \leftrightarrow C$ وهكذا). اختر دولة يبدأ اسمها بهذا الحرف. خذ الحرف الثاني من اسم هذه الدولة. اختر حيوان يبدأ اسمه بهذا الحرف. الآن، اترك صديقك يفكر للحظة ثم قل " لكن لا توجد فيلة في الدينمارك “but there are no elephants in Denmark!- - ما الصحيح هنا ؟ ما النكتة؟

(١٣) ليكن p عددًا أوليًا. وليكن n أي عدد صحيح موجب. جد صيغة لحساب عدد مضاعفات p في المضروب $n!$.

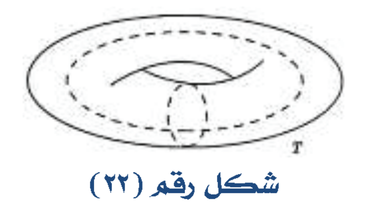
(١٤) [هالموس] تزن بطيخة 500 كيلوغرام. من المعلوم أن 99% من وزن البطيخة هو ماء. وضعنا البطيخة في غرفة درجة حرارتها عالية بحيث تفقد بعض الماء منها. في اليوم الثاني وجدنا أن نسبة الماء في البطيخة هي 98% من وزنها. ما وزن البطيخة الجديد؟

(١٥) يتنافس 15 فريق رياضي في مباريات دورية. يلعب كل فريق مع كل من الفرق الأخرى مباراة واحدة فقط. تحسب نقاط كل من الفرق على النحو التالي:

3 نقط للربح، 2 نقطة للتعادل، 1 نقطة للخسارة. عند حساب مجموع نقاط كل من الفرق مع نهاية المباريات وجدنا أن جميع هذه المجاميع مختلفة. كان أصغر مجموع هو 21 نقطة. بيّن أن الفريق الذي حصل على أكبر مجموع من النقاط خسر مباراة أو أكثر.

(١٦) لنفرض أن T طارة (torus) كما هو موضح في الشكل رقم (٢٢). جد العدد γ الذي يحقق الصيغة $V - E + F = \gamma$ لأي رسم مسموح على سطح الطارة T (تذكر أن $\gamma = 2$ للكرة ولكن العدد γ سيكون مختلفًا للطارة).

يسمى العدد γ، مميز أويلر (Euler characteristic). أثبت أن العدد γ الذي وجدته يحقق الصيغة لجميع الرسومات المسموحة في الطارة T.



شكل رقم (٢٢)

(١٧) لنفرض أن S كرة ذات k من المقابض كما هو موضح في الشكل رقم (٢٣) [يمكن اعتبار الطارة، كرة ذات مقبض واحد. هل تستطيع تفسير ذلك ؟]. ما العدد γ الذي يحقق الصيغة $V - E + F = \gamma$ لأي رسم مسموح على السطح S ؟ برهن أن الصيغة محققة للعدد γ الذي وجدته.



كرة لها k من المقابض

شكل رقم (٢٣)

(١٨) لون كل نقطة من نقاط المستوى الديكارتي بأحد الألوان: أحمر أو أزرق أو أصفر. فسر لماذا يمكنك استنتاج وجود قطعة مستقيمة طولها 1 في المستوى بحيث يكون طرفاها ملونين باللون نفسه.

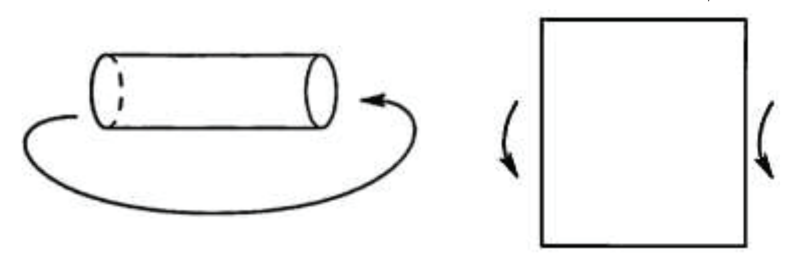
(١٩) لون كل نقطة من نقاط المستوى الديكارتي بأحد الألوان السبعة: أحمر أو أزرق أو أصفر أو أخضر أو بنفسجي أو برتقالي أو الفوشي. أثبت إمكانية عدم وجود قطعة مستقيمة طولها 1 طرفاها ملونان باللون نفسه.

(٢٠) لدى سكان إحدى القرى الصغيرة العادة الاجتماعية التالية: عندما يكذب الزوج على زوجته فسوف تعرف مباشرة جميع زوجات الرجال الآخرين في القرية ما عدا زوجة الرجل الكاذب. لا تبوح الزوجات لأحد عن معرفتهن الزوج الكاذب وكذلك الأزواج. في اليوم الذي تتأكد فيه زوجة كاذب بدون أدنى شك في أن زوجها قد كذب عليها فإنها تنقش الوشم " A " على جبينه كوصمة عار قبل غروب شمس ذلك اليوم.

في أحد الأيام أعلن مختار القرية عن وجود زوج كاذب واحد على الأقل في القرية (لم يذكر عدد الأزواج الكاذبين). على فرض أن عدد الأزواج الكاذبين في القرية هو 37 فبعد كم يوم سيتم اكتشافهم للعلن؟ [إرشاد: فكر في حالة وجود زوج واحد كاذب فقط. ثم في حالة وجود زوجين كاذبين في القرية. بعد ذلك استخدم الاستقراء]. أخذ هذا التمرين من [HAL].

(٢١) ما الذي سيحدث في التمرين السابق لو أن المختار أعلن عن العدد الفعلي للأزواج الكاذبين؟

(٢٢) لديك ورقة مربعة الشكل. طابق الحافة العليا مع الحافة السفلى وطابق الحافة اليسرى مع الحافة اليمنى بحيث تحافظ على اتجاهات الأضلاع (انظر: الشكل رقم ٢٤)



شكل رقم (٢٤)

ما الشكل الهندسي الذي ينتج عن ذلك ؟

تخيل الآن أنك قمت بتدوير الضلع الأيسر قبل لصق الضلعين الأيسر والأيمن

(انظر: الشكل رقم ٢٥). يسمى الشكل الناتج عن ذلك، زجاجة كلاين (Klien bottle). لا يمكن اعتبار زجاجة كلاين على أنها سطح في الفضاء ثلاثي البُعد، لكننا نعتبره كذلك لغرض دراسته رياضياً. ما قيمة العدد γ الذي يحقق الصيغة $V - E + F = \gamma$ لأي رسم مسموح على سطح زجاجة كلاين؟ هل تستطيع إثبات صواب استنتاجك؟



طابق توجيهات الأسهم

شكل رقم (٢٥)

(٢٣) جد صيغة مغلقة للمجموع:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

(٢٤) لتكن S مجموعة عدد عناصرها k. تعلم أن عدد المجموعات الجزئية من المجموعة S يساوي 2^k. ما علاقة ذلك بمعاملات ذات الحدين؟ [إرشاد: اعتبر $(1+x)^k$].

(٢٥) وعاء يحتوي على عدد a من الكرات البيضاء وعدد b من الكرات السوداء حيث $a + b \geq 3$. لنفرض أن لدى لاعبين A و B الإستراتيجيتان التاليتان:

١. يسحب A كرة من الوعاء عشوائياً. إذا كانت الكرة بيضاء فإنه يكسب وإذا كانت سوداء فإنه يخسر.

٢. يقوم A بسحب كرة من الوعاء ويتخلص منها من دون معرفة لونها. بعد ذلك يقوم B بسحب كرة سوداء. يقوم A بسحب كرة أخرى. إذا

كانت الكرة الثانية التي سحبها A بيضاء فإنه يكسب وإذا كانت سوداء فإنه يخسر.

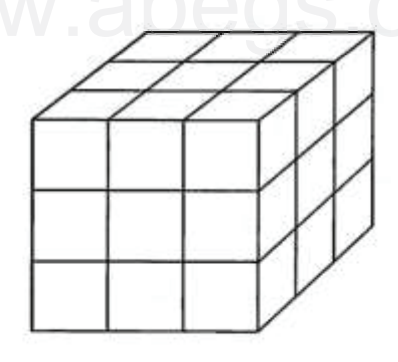
إذا استخدم اللاعب A الإستراتيجية (١) فأثبت أن احتمال ربحه هو $\frac{a}{a+b}$

وأما إذا استخدم الإستراتيجية (٢) فإن احتمال ربحه هو :

$$\frac{a}{a+b}+\frac{a}{(a+b)(a+b-2)}$$

من الواضح أن الإستراتيجية (٢) هي الأفضل. ما علاقة هذا التمرين بمسألة مونتي هول؟

(٢٦) لدينا مكعب مصنوع من الخشب طول ضلعه 3 بوصة. يمكن تقسيم المكعب إلى 27 مكعباً طول ضلع كلاً منها 1 بتقسيم كل من وجوهه إلى 9 مربعات طول ضلع كل منها 1 (انظر : الشكل رقم ٢٦).



شكل رقم (٢٦)

هل تستطيع نملة بيضاء البدء من أي نقطة على سطح المكعب وتقف على كل من المكعبات ثم تنتهي بمركز المكعب ؟

(٢٧) ارجع إلى المثال المقدم في الكتاب حول تبليط أرضية غرفة الحمام. ما الذي يحدث لو كان المربعان غير المرغوب في تبليطهما يقعان في ركنين من جهة

واحدة وليسا في جهتين متقابلتين؟ ماذا لو كان المربعان متجاورين وفي هذه الحالة هل يؤثر موقعهما في عملية التبليط (كأن يقعا في منتصف أحد الجوانب أو منتصف الغرفة). قم بتجريب بعض الحالات!

(٢٨) جد طريقتين على الأقل لحساب المجموع:

$$101 + 102 + 103 + \cdots + 200$$

[لا تعتبر عملية جمعهم حداً حداً "طريقة"].

(٢٩) مسرح يحتوي على 500 مقعد. يوجد ثلاثة ألوان من القماش أحمر وأزرق وأصفر تستخدم عشوائياً لتغطية المقاعد بحيث يأخذ كل مقعد لوناً واحداً فقط. كم عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

(٣٠) يتشارك خمسة أشخاص في لعبة السبع ورقات حيث يوزع على كل لاعب سبع أوراق. خمس منها مغطاة وورقتان مكشوفتان. كانت الورقتان المكشوفتان لأحد اللاعبين هما شابان وجميع الأوراق المكشوفة للاعبين الآخرين ليست شباباً. ما احتمال أن تكون إحدى الأوراق المغطاة لدى هذا اللاعب هي شاب أيضاً؟

الفصل الثاني

نظرة أعمق على الهندسة
A Deeper Look at Geometry

(١,٢) هندسة مستوية تقليدية
Classical Planar Geometry

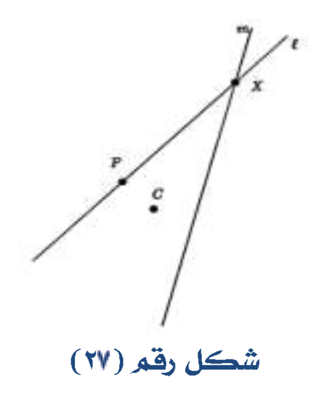
تعتمد مسائل هذا البند على مفاهيم الهندسة الإقليدية التقليدية. سنطرق للمثلثات والدوائر، للإنشاءات باستخدام المسطرة والفرجار، الزوايا القائمة، الزوايا المتجاورة، الزوايا المتقابلة. سنقدم لاحقًا مسائل على هندسة المجسمات، لكن جميع مسائل هذا البند ستكون في المستوى.

مسألة (١,١,٢)

لنفرض أن ℓ و m مستقيمان متخالفان في المستوى (أي يتقاطعان في نقطة واحدة X). لنفرض أن $P \neq X$ نقطة على المستقيم ℓ. استخدم المسطرة والفرجار لإنشاء دائرة تمسُّ المستقيمين وتمرُّ بالنقطة P.

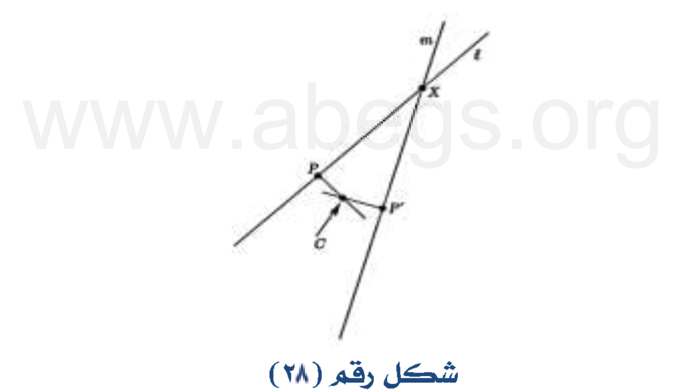
الحل:

إذا استطعنا إنشاء المركز C للدائرة فعندئذ يمكن إنشاء الدائرة لأن نصف قطر الدائرة سيكون المسافة من C إلى P ومن ثم نستطيع قياس هذه المسافة باستخدام الفرجار (انظر: الشكل رقم ٢٧).



شكل رقم (٢٧)

بما أن P نقطة تماس فإن القطعة التي أحد طرفيها P يجب أن تكون عمودية على ℓ. لذا نقوم بإنشاء مستقيم يكون عموديًّا على ℓ عند النقطة P (انظر: الشكل رقم ٢٨).

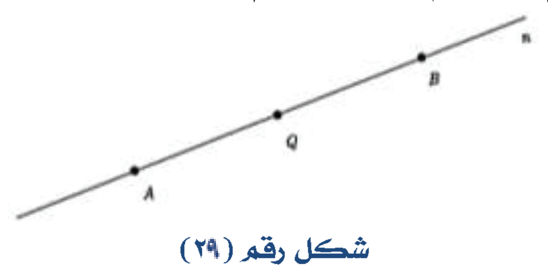


شكل رقم (٢٨)

من الممكن قياس المسافة من X إلى P. لذا يمكن تحديد نقطة P' على m بحيث يكون لها المسافة نفسها من X. بالتماثل، ستكون الدائرة التي نحن بصدد إنشاءها تمس m عند P'.

إذا استطعنا إنشاء عمودي على ℓ عند P وعمودي على m عند P' فإن تقاطع هذين العمودين سيكون مركز الدائرة (انظر: الشكل رقم ٢٨). لهذا فإننا اقتصرنا المسألة على إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم معلوم عند نقطة معلومة

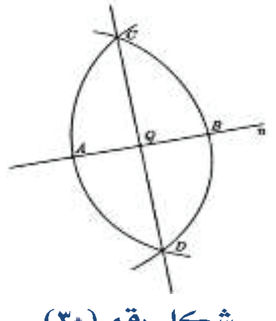
على ذلك المستقيم. نستخدم الآن الشكل رقم (٢٩).



شكل رقم (٢٩)

تقع النقطة Q على المستقيم n. استخدم الفرجار لتحديد موقعي النقطتين A و B على n بحيث تقعان على جهتين مختلفتين من Q وتبعدان المسافة نفسها عن Q. المستقيم العمودي المطلوب هو مجموعة جميع النقاط التي تبعد المسافة نفسها عن كل من A و B. ولكن لدينا مسبقًا نقطة على المستقيم (النقطة Q). لذا نحتاج إلى نقطة أخرى لأن المستقيم يتحدد تمامًا بنقطتين.

افتح الفرجار مسافة تساوي المسافة بين A و B. ارسم قوسًا مركزه A ونصف قطره تلك المسافة (انظر: الشكل رقم ٣٠)



شكل رقم (٣٠)

ارسم الآن قوسًا آخر مركزه B ونصف قطره تلك المسافة. من الواضح الآن أن نقطتي تقاطع هذان القوسان C و D تبعدان المسافة نفسها عن A و B. إذن، تقع النقاط Q, D, C على المستقيم المطلوب. المستقيم الوحيد المار بالنقطتين C و D يمر بالنقطة Q وعمودي على المستقيم n.

وبهذا نكون قد أنشأنا مستقيمًا عموديًّا على مستقيم معلوم يمرُّ بنقطة معلومة. وباستخدام تحليلنا السابق نكون قد أنشأنا دائرة تمس المستقيمين وهذا ينهي حل المسألة. □

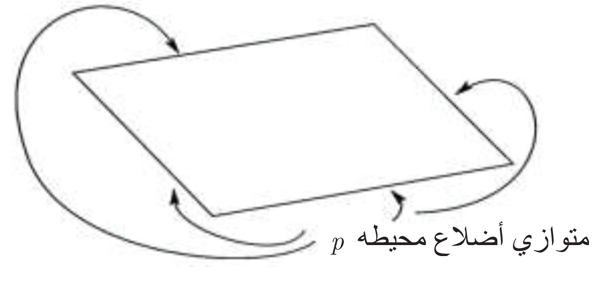
الملاحظة المهمة التي نلاحظها من حل المسألة السابقة هي الاختزال: اختزلنا مسألة إنشاء دائرة إلى إيجاد مركزها واختزلنا إيجاد هذا المركز إلى إنشاء أعمدة وهكذا. ندعو مَنْ لديه مهارة في حلِّ المسائل إلى اختزال المسألة السابقة إلى متتالية من المسائل الأسهل.

مسألة (٢.١.٢)

من بين جميع متوازيات الأضلاع معلومة المحيط، ما متوازي الأضلاع الذي له المساحة الأكبر ؟

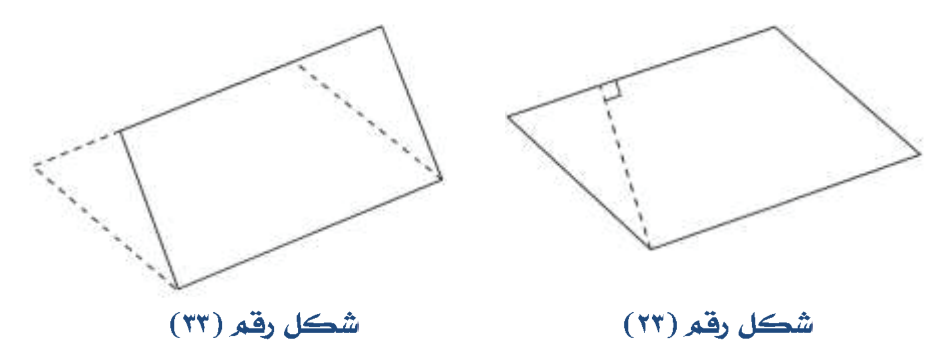
الحل:

لنفرض أن p هو المحيط. الشكل رقم (٣١) يبين متوازي أضلاع محيطه p .



شكل رقم (٣١)

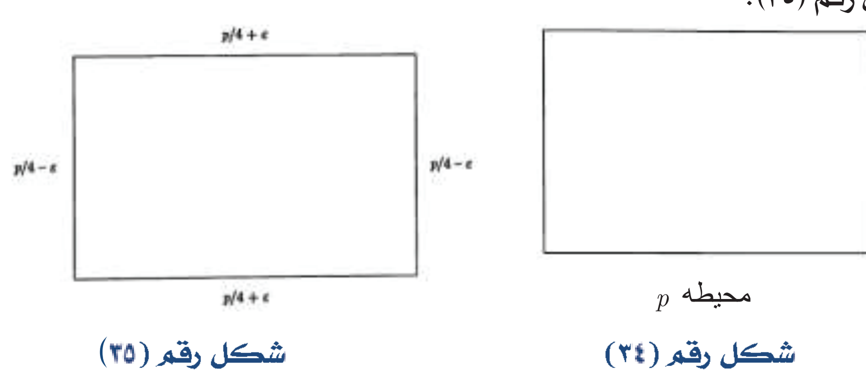
إذا قطعنا مثلثًا كما هو مبين في الشكل رقم (٣٣) ومن ثم إعادة رسم هذا المثلث، كما هو مبين في الشكل رقم (٣٣)، فإن المسافة لا تتغير لكن المحيط ينقص (العرض يبقى كما هو لكن الضلعين الآخرين يصبحان عموديين وبالتالي يقصر الطول).



شكل رقم (٣٢)   شكل رقم (٣٣)

من ذلك نرى أنه يمكن الحصول على المساحة العظمى بدراسة مستطيلات عوضًا عن متوازيات أضلاع عامة.

لنفرض إذن، أن لدينا مستطيلاً (ليس بالضرورة مربعًا) كما هو مبين في الشكل رقم (٣٤) ولنفرض أن محيطه يساوي p . نفرض أن طول المستطيل هو $\frac{p}{4}+\varepsilon$ وأن عرضه هو $\frac{p}{4}-\varepsilon$ حيث $\varepsilon \geq 0$. لاحظ أن المحيط يساوي p كما هو موضح في الشكل رقم (٣٥).



شكل رقم (٣٤)   شكل رقم (٣٥)

مساحة المستطيل هي:

$$\left[\frac{p}{4}+\varepsilon\right]\times\left[\frac{p}{4}-\varepsilon\right]=\frac{p^2}{16}-\varepsilon^2$$

ونحصل على مساحة أعظمية بجعل $\varepsilon \geq 0$ أصغر ما يمكن. أي عندما يكون $\varepsilon = 0$
وبهذا فإننا نحصل على مساحة أعظمية عندما يكون المستطيل مربعاً. □

توضح لنا المسألة السابقة عدداً من النقاط. إحدى هذه النقاط هي القدرة على إنجاز الكثير من دون اللجوء إلى التفاضل والتكامل. إن استخدام التماثل والتبرير الهندسي يعدُّ أسلوباً حاسماً. من الممكن حل هذه المسألة باستخدام التفاضل والتكامل أو الهندسة الإحداثية ولكن الابتكار هنا بديل جيد عن استخدام أدوات متقدمة.

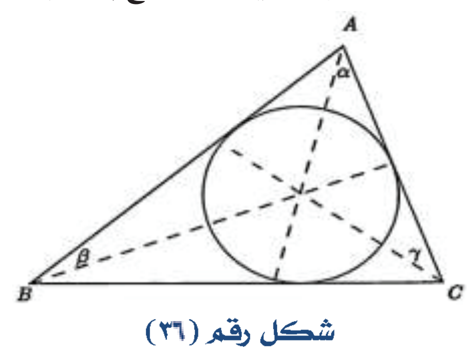
مسألة (٢,١,٣)

باستخدام المسطرة والفرجار، جد مركز الدائرة المرسومة داخل مثلث معطى.

الحل:

نفترض هنا عدم معرفتنا بأي خصائص للدائرة المرسومة داخل مثلث وجل ما نعرفه هو المفهوم الهندسي. سنفترض (على الأقل مؤقتاً) وجود الدائرة المرسومة داخل مثلث. أي، إذا كان لدينا مثلث معطى فنفترض وجود دائرة بحيث تكون أضلاع المثلث مماسات للدائرة. سنناقش مسألة وجود الدائرة لاحقاً.

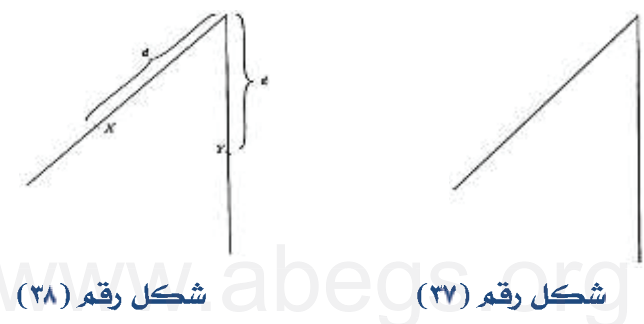
بالرجوع إلى الشكل رقم (٣٦)، نريد إنشاء دائرة بحيث تمس الضلعين AB و AC. لذا فإن مركز الدائرة يبعد مسافتين متساويتين عن ضلعي الزاوية A. أي أنه يقع على منصف الزاوية $\alpha = A$. وهذا أيضاً صحيح بالنسبة للزاويتين β و γ.



شكل رقم (٣٦)

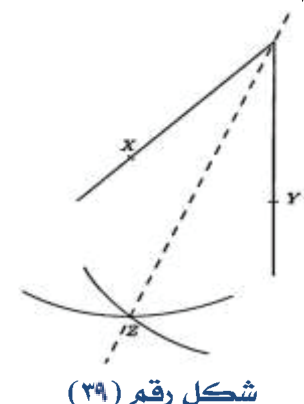
ومن ذلك نرى أنه إذا استطعنا إنشاء منصفات الزوايا الثلاثة مع افتراضنا وجود مثل هذه الدائرة فإن المنصفات الثلاثة تتقاطع في نقطة وأن هذه النقطة هي مركز الدائرة.

المسألة اختزلت إلى إيجاد منصف زاوية معلومة. بالرجوع إلى الشكل رقم (٣٧)، يكون المطلوب إيجاد نقطة بحيث تبعد مسافتين متساويتين عن ضلعي الزاوية.



شكل رقم (٣٨) شكل رقم (٣٧)

لكننا لا نستطيع إنجاز ذلك بالقياس من رأس الزاوية. لذا نقوم بفتح الفرجار على مسافة ثابتة d ونُعَلِّم نقطتين X و Y على ضلعي الزاوية يبعدان المسافة d عن الرأس (انظر: الشكل رقم ٣٨). نفتح الآن الفرجار عند X ونرسم قوسًا نصف قطره d، ثم نضع الفرجار عند Y، ونرسم قوسًا نصف قطره d (انظر: الشكل رقم ٣٩).



شكل رقم (٣٩)

نقطة التقاطع Z ستكون على بعدين متساويين من كل X و Y. المستقيم المرسوم من النقطة Z يمرُّ برأس الزاوية ويكون منصفًا لها.

بعد إنشاء منصف للزاوية نكون قد أنشأنا مركز دائرة مرسومة داخل مثلث وتمس أضلاعه. □

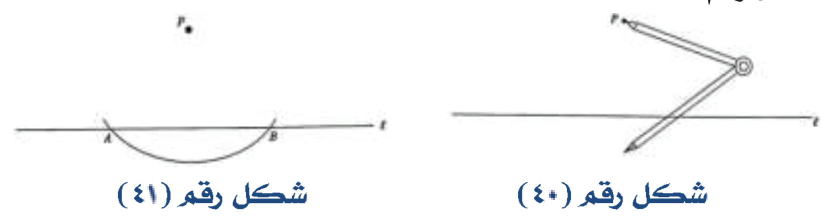
نناقش الآن مسألة وجود دائرة مرسومة داخل مثلث. لاحظ أن منصف الزاوية A يبعد مسافتين متساويتين عن الضلعين AB و AC. أيضًا، منصف الزاوية B يبعد مسافتين متساويتين عن الضلعين AB و BC. إذن، نقطة تقاطع هذين المنصفان تبعد مسافات متساوية عن AB، AC، BC. لذا فإن نقطة تقاطع المنصفين للزاويتين A و B تقع على منصف الزاوية C. وبهذا نكون قد أثبتنا وجود نقطة مشتركة على منصفات الزوايا الثلاث. وبما أن هذه النقطة تبعد مسافات متساوية عن أضلاع المثلث الثلاثة فإنها ستكون مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث. نصف قطر هذه الدائرة هو المسافة المشتركة بين هذه النقطة وأي من الأضلاع. المسألة التالية توضح كيفية إيجاد نصف القطر هذا.

مسألة (٢,١,٤)

ليكن ℓ مستقيمًا، P نقطة تقع خارج هذا المستقيم. استخدم المسطرة والفرجار لإنشاء مستقيم يمرُّ بالنقطة P وعمودي على ℓ.

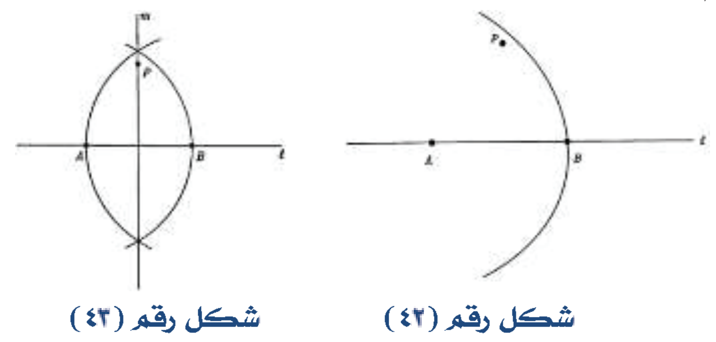
الحل:

ركز رأس الفرجار عند P ثم افتحه مسافة أكبر من المسافة بين P و ℓ (انظر: الشكل رقم ٤٠).



شكل رقم (٤٠)   شكل رقم (٤١)

ارسم قوسًا يقطع ℓ عند A و B (انظر: الشكل رقم٤١). الأن، ركز رأس الفرجار عند A وافتح الفرجار مسافة تصل إلى النقطة B. ارسم قوسًا كما هو موضح في الشكل رقم (٤٢).



شكل رقم (٤٣) شكل رقم (٤٢)

كرر الخطوة السابقة بتركيز رأس الفرجار عند B هذه المرة (انظر: الشكل رقم ٤٣).

نقطتا تقاطع القوسين تبعدان مسافتين متساويتين عن كل من A و B. المستقيم m المكون من مجموعة النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن كل من A و B يجب أن يكون عموديًّا على ℓ ويمر بالنقطة P لأن P تبعد مسافتين متساويتين عن كل من A و B. □

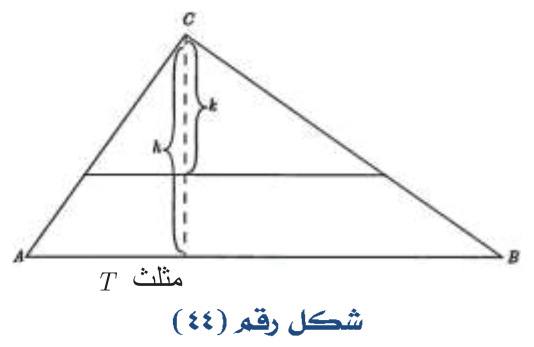
لاحظ أن نصف قطر الدائرة التي مركزها P وتمس ℓ هو المسافة من P إلى نقطة تقاطع m و ℓ.

مسألة (٥,١,٢)

لنفرض أن T مثلث قاعدته $\overline{AB}$. بين كيفية إنشاء قطعة مستقيمة موازية للقطعة $\overline{AB}$ يقع طرفاها على الضلعين الآخرين $\overline{CA}$ و $\overline{CB}$ للمثلث وتقسم مساحة المثلث إلى منطقتين مساحتيهما متساويتين.

الحل:

بالرجوع إلى الشكل رقم (٤٤)، نفرض أن ارتفاع المثلث h وأن المسافة من الرأس C إلى القطعة المراد إنشاءها تساوي k . [لاحظ أننا تعلمنا من المسألة السابقة كيفية إنشاء ارتفاع أو عمود].

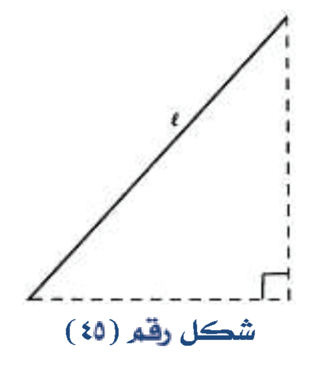


شكل رقم (٤٤)

المنطقة P من المثلث T الواقعة أعلى قطعة المستقيم المراد إنشاءها هي أيضًا مثلث يشبه المثلث T . هذا واضح لأن فيهما ضلعين متوازيين. إذا كانت α هي النسبة بين ارتفاع المثلث الصغير k إلى ارتفاع المثلث الكبير h فإن α هي النسبة بين قاعدتيهما. إذن، النسبة بين مساحتيهما تساوي α^2 (لأن مساحة المثلث تساوي حاصل ضرب نصف مساحة القاعدة في الارتفاع). من ذلك نجد أنه يكفي إنشاء قطعة مستقيمة تحقق $\alpha^2 = \frac{1}{2}$ أو $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. أي أن $k = \frac{1}{\sqrt{2}}h$.

من ذلك نجد أن المسألة قد تم اختزالها إلى مسألة إنشاء قطعة مستقيمة طولها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من طول قطعة معطاة.

لنفرض إذن، أن ℓ قطعة مستقيمة معطاة كما هو مبين في الشكل رقم (٤٥).



شكل رقم (٤٥)

نستخدم أفكار المسائل السابقة والمسطرة والفرجار لإنشاء مثلث قائم متساوي الساقين وتره القطعة ℓ (أنشئ مربعًا طول ضلعه ℓ ثم ارسم قطري هذا المربع). طول كل من ساقي هذا المثلث يساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}\ell$ فهذا هو الإنشاء المطلوب. □

مرة أخرى استخدمنا الاختزال هنا حيث استعنا بتشابه المثلثات لاختزال مسألة هندسة صعبة إلى مسألة هندسة بدائية.

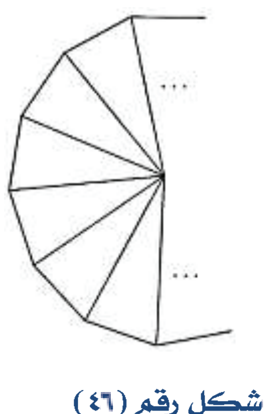
مسألة (٦,١,٢)

لنفرض أن P مضلع منتظم عدد أضلاعه k. ما قياس كل من زوايا P الداخلية؟

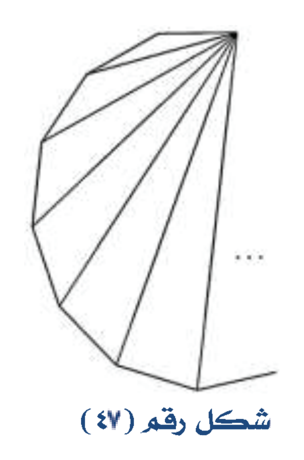
الحل:

ما الذي نعرفه عن زوايا المضلع؟ نعلم أن مجموع زوايا المثلث تساوي $180°$ (أو π راديان). هل من الممكن استخدام هذه الحقيقة لحلِّ المسألة؟

سنحاول تقسيم المضلع P إلى مثلثات. يقترح الشكل رقم (٤٦) طريقة لإنجاز ذلك ويقترح الشكل رقم (٤٧) طريقة أخرى لإنجاز ذلك. ندرس كل واحدة من هاتين الطريقتين.



شكل رقم (٤٦)



شكل رقم (٤٧)

في الشكل رقم (٤٦)، قسمنا المضلع P إلى عدد k من المثلثات متساوية الساقين المنفصلة. مجموع زوايا كل من هذه المثلثات يساوي 180°. إذن، مجموع زوايا جميع هذه المثلثات يساوي $(180k)^\circ$. لكن هذا المجموع لا يساوي مجموع جميع زوايا المضلع الداخلية لأن الزوايا حول مركز P ليست ضمن الزوايا الداخلية للمضلع. إذن،

$= (180k)^\circ$ (مجموع زوايا المثلثات) $= 360^\circ +$ (مجموع الزوايا الداخلية للمضلع P)

ومن ذلك نجد أن مجموع الزوايا الداخلية للمضلع P هو $180(k-2)^\circ$.

دعنا نبين الآن أن استخدام طريقة الشكل رقم (٤٧) لحساب الزوايا الداخلية ستؤدي إلى الإجابة نفسها. بما أن عدد أضلاع P يساوي k فإن طريقة الشكل رقم (٤٧) تقسم المضلع إلى $(k-2)$ مثلث. في هذه المرة مجموع زوايا جميع المثلثات تساوي مجموع زوايا P الداخلية. إذن، مجموع زوايا المضلع الداخلية يساوي $180(k-2)^\circ$ وهذا ما توصلنا إليه باستخدام الشكل رقم (٤٧). إذن، قياس أي زاوية داخلية من زوايا المضلع هو:

$$.\alpha = \frac{180(k-2)}{k} \qquad \square$$

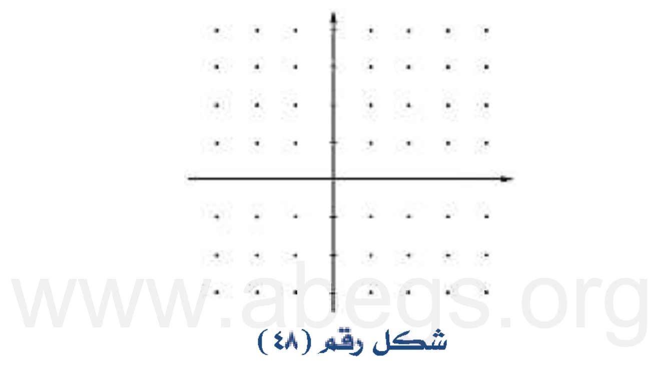
مسألة (٢,١,٧)

بين لماذا أن قياس مجموع زوايا المثلث يساوي 180° [لاحظ أننا استخدمنا ذلك لحل المسألة (٢,١,٦) لذا لا يمكن استخدامها لحل مسألة التحدي هذه].

يوضح حلنا للمسألة السابقة مبدأ مهمًا: عند محاولة حل مسألة جديدة، أسأل نفسك فيما إذا كنت على دراية بمفهوم سابق له علاقة بالمسألة. حاول إيجاد معلومة تساعدك كنقطة انطلاق. المسألة التالية هي أيضًا من هذا النمط.

مسألة (٢،١،٨)

النقطة الشبكية (lattice point) هي نقطة في المستوى الديكارتي إحداثياها عددان صحيحان. الشكل رقم (٤٨) يبين عددًا من النقاط الشبكية.



شكل رقم (٤٨)

نفرض أن C_R دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R > 0$. ونفرض أن $M\ R$ عدد النقاط الشبكية داخل (وليس على المحيط) الدائرة C_R. جد صيغة تقاربية للعدد $M\ R$ عندما $R \to +\infty$.

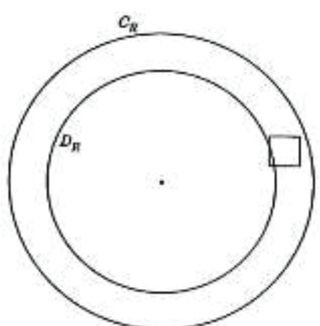
الحل:

من المستحيل إيجاد صيغة دقيقة للعدد $M\ R$ لكننا سنبحث عن كمية $\mu(R)$ قابلة للحساب وتحقق $\frac{\mu(R)}{M(R)} \to 1$ عندما $R \to +\infty$.

إحدى الأدوات الفاعلة لهذا النمط من مسائل العد هي استخدام المساحة. لاحظ أولاً أن أي مربع طول ضلعه 1 حيث أضلاعه توازي محوري الإحداثيات يجب أن يحتوي على نقطة شبكية واحدة على الأقل. للسهولة، نركز اهتمامنا على مربعات من هذا النمط مراكزها نقاط (m,n) حيث m و n عددان صحيحان. نطلق على هذا النمط

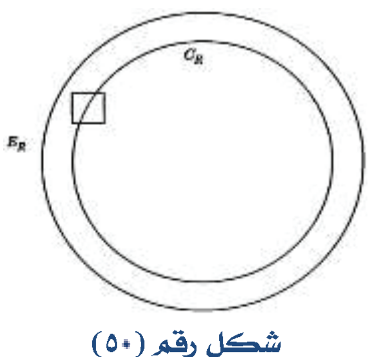
من المربعات "المربعات الجيدة". كل من هذه المربعات يحتوي على نقطة شبكية واحدة في المركز ولا يحتوي أي نقاط شبكية أخرى.

الآن، ارسم داخل الدائرة C_R التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R دائرة D_R مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $(R-\sqrt{2})$ كما هو مبين في الشكل رقم (٤٩).



شكل رقم (٤٩)

الآن، أي مربع يقطع D_R سيقع تماماً داخل C_R. وبالمثل، افرض أن دائرة E_R مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $(R+\sqrt{2})$. أي مربع جيد يقطع C_R يقع تماماً داخل E_R (انظر: الشكل رقم ٥٠).



شكل رقم (٥٠)

من ذلك نرى أن:

مساحة المنطقة داخل $D_R = \pi(R-\sqrt{2})^2$

مجموع مساحات المربعات الجيدة داخل $C_R \le$

مجموع مساحات المربعات الجيدة التي تحتوي نقاط شبكية داخل $C_R \le$

عدد النقاط الشبكية داخل $C_R =$

عدد المربعات الجيدة التي تقع داخل C_R أو تقطع $C_R \le$

مجموع مساحات جميع المربعات داخل $E_R \le$

المساحة داخل $E_R \le$

$= \pi(R+\sqrt{2})^2$

إذن:

$$\pi(R-\sqrt{2})^2 \le M(R) \le \pi(R+\sqrt{2})^2$$

الآن، بقسمة المتباينتين على πR^2 نجد أن

$$\frac{\pi(R-\sqrt{2})^2}{\pi R^2} \le \frac{M(R)}{\pi R^2} \le \frac{\pi(R+\sqrt{2})^2}{\pi R^2}$$

بجعل $R \to +\infty$ نجد أن:

$$\frac{M(R)}{\pi R^2} \to 1$$

وبهذا نحصل على الإجابة المطلوبة من المسألة، أي أن الصيغة التقاربية لعدد النقاط الشبكية داخل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R هي πR^2. لكن من الممكن الحصول على صيغة أدق لأن:

$$\pi(R-\sqrt{2})^2 = \pi[R^2 - 2\sqrt{2}R + 2] = \pi R^2\left[1 - \frac{2\sqrt{2}}{R} + \frac{2}{R^2}\right]$$

$$\pi(R+\sqrt{2})^2 = \pi[R^2 + 2\sqrt{2}R + 2] = \pi R^2\left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{R} + \frac{2}{R^2}\right]$$

إذن، $M(R) = \pi R^2[1+\varepsilon(R)]$ حيث الخطأ $\varepsilon(R)$ لا يزيد على $\frac{C}{R}$. □

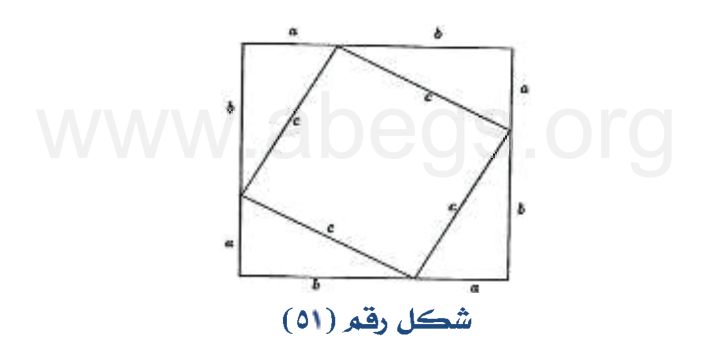
مسألة (٩،١،٢)

برهن مبرهنة فيثاغورس.

الحل:

هذه المبرهنة هي المبرهنة في الرياضيات التي لها أكبر عدد من البراهين (أكثر من 300 برهان - انظر : [Gul]). قدم أحد هذه البراهين رئيس سابق للولايات المتحدة الأمريكية هو الرئيس جيمس أ. جارفيلد (James A. Garfield). سنقدم هنا برهانين من هذه البراهين.

للبرهان الأول، افرض أن a ، b هما طولا ساقي المثلث القائم وأن c هو طول وتره كما هو مبين في الشكل رقم (٥١).



شكل رقم (٥١)

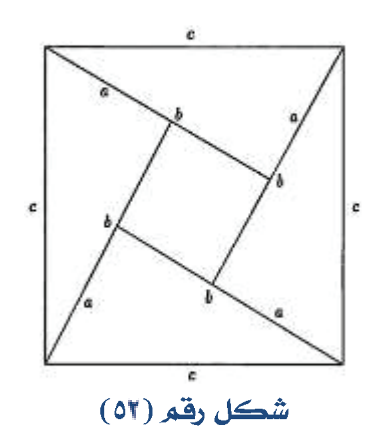
طول ضلع المربع الخارجي يساوي $a+b$. لذا فمساحته تساوي $(a+b)^2$. ومن ناحية أخرى، نجد أن المربع الخارجي يتكون من أربعة مثلثات ومربع صغير طول ضلعه c .

مساحة كل من المثلثات تساوي $\frac{ab}{2}$ ومساحة المربع الصغير تساوي c^2 . إذن،

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$$

وبالتبسيط نحصل على مبرهنة فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$.

وللبرهان الثاني، (انظر : الشكل رقم ٥٢) [للسهولة، فرضنا هنا أن $b > a$].



شكل رقم (٥٢)

طول ضلع المربع الكبير الخارجي يساوي c . لذا فإن مساحته تساوي c^2 . ومن ناحية أخرى المربع الخارجي مكون من أربعة مثلثات ومربع أصغر. مساحة كل من المثلثات $\frac{ab}{2}$. طول ضلع المربع الصغير يساوي $(b-a)$ (بفرض أن $b > a$) ومن ثم فمساحته تساوي $(b-a)^2$. إذن:

$$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2$$

وبالتبسيط نحصل على $c^2 = b^2 + a^2$ وهي مبرهنة فيثاغورس. □

مسألة (١٠,١,٢)

أثبت قانون الجيب: إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا زواياه المقابلة للرؤوس A ، B ، C هي α ، β ، γ على التوالي فإن:

$$\frac{\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin\beta}{AC} = \frac{\sin\gamma}{AB}$$

[إرشاد: احسب ارتفاع المثلث بطريقتين].

مسألة تحدي (١١,١,٢)

أثبت قانون جيب التمام: إذا كانت α الزاوية بين الضلعين AB و AC في $\triangle ABC$ فإن:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos\alpha$$

(٢,٢) الهندسة الإحداثية
Analytic Geometry

ركزنا اهتمامنا في البند السابق على ما يسمى هندسة تركيبية (synthetic geometry) التي اكتشفها إقليدس وقدماء اليونانيين. وفي هذا البند ندرس الهندسة الإحداثية التي اكتشفها ديكارت (Descartes). يمكن حل العديد من المسائل بإحدى الهندستين. إذا قرأت حلاً لإحدى المسائل باستخدام إحدى الهندستين فيكون من المناسب أن تتحدى نفسك وتحاول حل المسألة باستخدام الهندسة الأخرى.

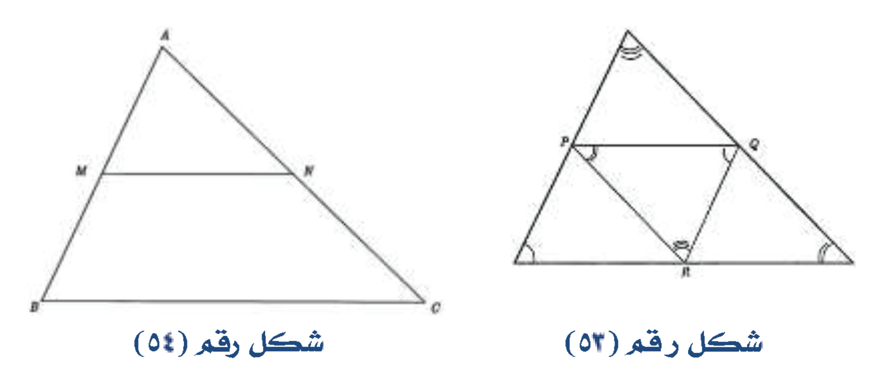
مسألة (١,٢,٢)

لنفرض أن T مثلث في المستوى. ولنفرض أن P ، Q ، R نقاط المنتصف لكل من أضلاعه الثلاث. أثبت أن المثلث الذي رؤوسه P ، Q، R يشبه المثلث الأصلي T.

الحل:

تذكر أن المثلثين يكونان متشابهان إذا تساوت زواياهما المتقابلة أو تناسبت أضلاعهما المتقابلة. في كلا الحالتين يكون أحد المثلثين صورة مكبرة عن الآخر.

نستخدم الزوايا لإثبات التشابه. إذا استطعنا إثبات أن أضلاع المثلث $\triangle PQR$ توازي أضلاع المثلث T فإن زواياهما المتقابلة ستكون بالطبع متساوية. (الشكل رقم (٥٣) يساعدنا على رؤية ذلك).

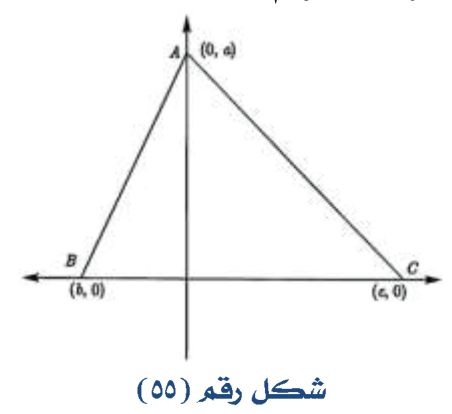


شكل رقم (٥٤)

شكل رقم (٥٣)

وبهذا نكون قد اختزلنا المسألة إلى مسألة أسهل: إذا كان $T = \triangle ABC$ مثلثًا وكانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ و N نقطة منتصف $\overline{AC}$ فإن القطعة المستقيمة $\overline{MN}$ توازي الضلع BC (انظر: الشكل رقم ٥٤).

نستخدم الهندسة الإحداثية لإثبات ذلك. عند استخدامنا الهندسة الإحداثية فإنه من المهم اختيار الإحداثيات الملائمة للمسألة لغرض تسهيل الحل. بتطبيق دوران وإزاحة رأسية على مثلثنا يكون من الممكن افتراض أن الرأسين B و C يقعان على المحور x وأن الرأس A يقع أعلى المحور x. وبتطبيق إزاحة أفقية نفترض أن الرأس A يقع على محور y الموجب (انظر: الشكل رقم ٥٥).



شكل رقم (٥٥)

لنفرض إذن، أن $A = (0, a)$ ، $B = (b, 0)$ ، $C = (c, 0)$. عندئذ، نقطة منتصف $\overline{AB}$

هي $M=\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$ ونقطة منتصف $\overline{AC}$ هي $N=\left(\frac{c}{2},\frac{a}{2}\right)$ ميل القطعة المستقيمة $\overline{MN}$ هو:

$$\frac{a/2-a/2}{c/2-b/2}=0$$

أي أن $\overline{MN}$ قطعة مستقيم أفقية. ولكن قاعدة المثلث BC أفقية. إذن، MN يوازي BC وهذا هو ما نود إثباته. □

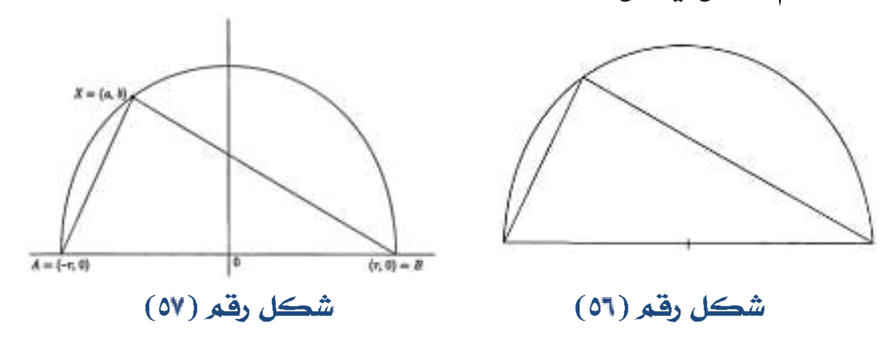
لاحظ أننا استخدمنا الاختزال مرة أخرى في المسألة السابقة: قمنا باختزال متتال للمسألة الأصلية إلى مسائل أساسية أسهل منها.

مسألة (٢,٢,٢)

أثبت أن الزاوية التي تقابل نصف دائرة يجب أن تكون قائمة.

الحل:

الشكل رقم (٥٦) يساعدك على تذكر ماذا نعني بزاوية تقابل قوس دائرة. كما أننا سنستخدم الشكل في حل المسألة.



شكل رقم (٥٦)

شكل رقم (٥٧)

نحتاج إلى تحديد إحداثيات. نفرض أن مركز نصف الدائرة هو نقطة الأصل وأن نصف قطرها يساوي r وأن $X=(a,b)$ هو رأس الزاوية في مسألتنا (انظر

الشكل رقم ٥٧). ميل AX هو $\frac{b-0}{a+r}$ وميل XB هو $\frac{b-0}{a-r}$. حاصل ضرب الميلين يساوي:

$$\frac{b^2}{a^2-r^2}. \qquad (*)$$

وبما أن النقطة (a,b) تقع على الدائرة فإن $a^2+b^2=r^2$. أي أن $b^2=r^2-a^2$. بالتعويض في $(*)$ نجد أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1. إذن، المستقيمان متعامدان ومن ثم فقياس الزاوية يساوي 90°. □

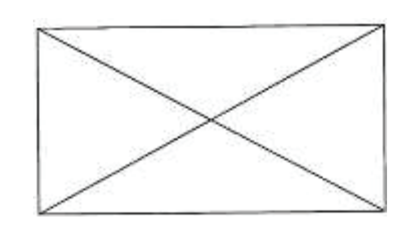
مسألة تحدي (٢,٢,٣)

لنفرض أن B و C نقطتان مختلفتان في المستوى. ولنفرض أن α قياس زاوية بين 0° و 90°. أثبت أن المحل الهندسي لجميع النقاط P حيث BPC يتكون من قوسي دائرة.

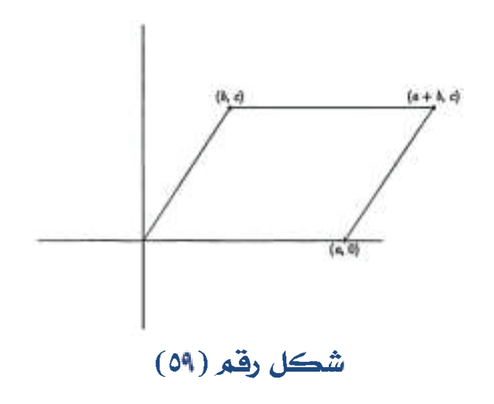
مسألة (٢,٢,٤)

صواب أم خطأ: إذا تعامد قطرا متوازي أضلاع فإن متوازي الأضلاع يجب أن يكون مستطيلاً.

دعنا نتوخى الحذر لما هو مطلوب في المسألة. الشكل رقم (٥٨) يبين مستطيلاً من الواضح أن قطريه ليسا متعامدين. ولكن المسألة لا تطلب إثبات أن قطري المستطيل يجب أن يكونا متعامدين. ولكنها تسأل إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنه مستطيل؟



شكل رقم (٥٨)



شكل رقم (٥٩)

الحل:

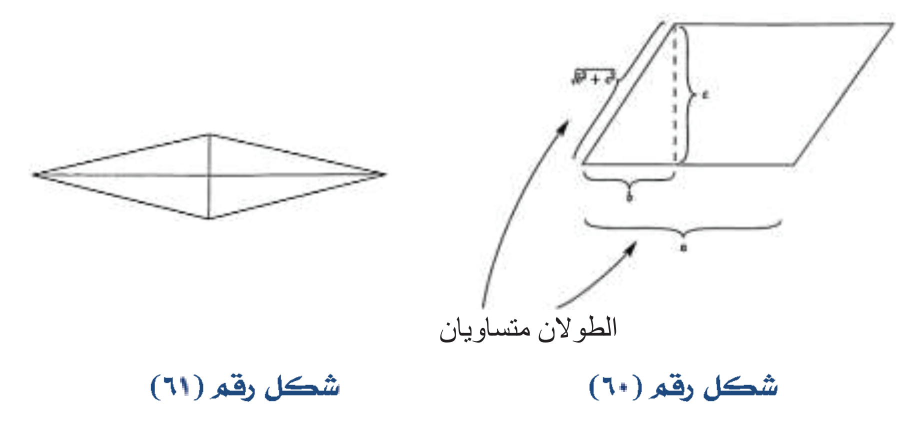
نكون إحداثيات كما هو موضح في الشكل رقم (٥٩). نفرض أن $(0,0)$، $(a,0)$، (b,c) ثلاثة رؤوس من رؤوس متوازي الأضلاع. عندئذ، الرأس الرابع هو $(a+b,c)$. الآن، ميل القطر الرئيس هو $\frac{c}{a+b}$ وميل القطر الثانوي هو $\frac{c}{b-a}$. بما أنهما متعامدان من الفرض فإن حاصل ضربهما يساوي -1. أي

$$\frac{c}{b-a} \times \frac{c}{b+a} = -1$$

أو

$$b^2 + a^2 = c^2 \qquad (**)$$

هذه الصيغة تشبه صيغة فيثاغورس، لذا فمن الممكن أن تؤدي المطلوب لأنها تعني أن طول ضلع متوازي الأضلاع الذي طرفيه $(0,0)$ و$(a,0)$ يساوي طول الضلع الذي طرفيه $(0,0)$ و(b,c) (انظر الشكل رقم ٦٠).



شكل رقم (٦٠)

شكل رقم (٦١)

إذن، متوازي الأضلاع يجب أن يكون مُعَينًا.

لكننا استخدمنا جميع المعلومات المقدمة في المسألة مما يجعلنا نتساءل عن صواب ادعاءنا. قطرا متوازي الأضلاع المقدم في الشكل رقم (٦١) متعامدان لكنه من الواضح أنه ليس مستطيلاً (ولكنه مُعين). وبهذا فإن إجابة المسألة "خطأ". □

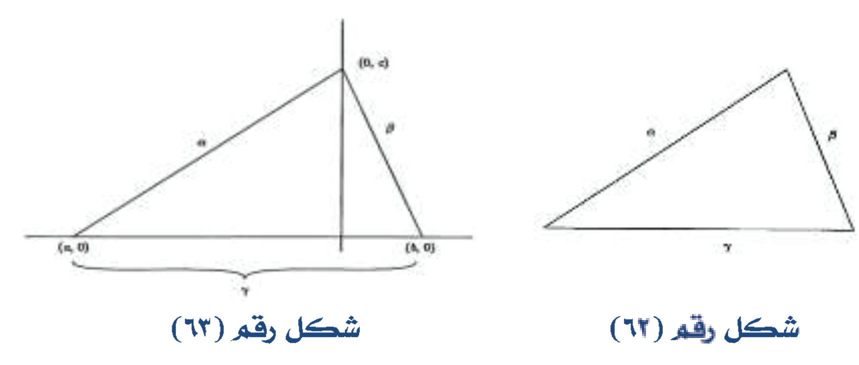
تعلمنا المسألة السابقة درسًا بسيطًا ولكنه مهم: على الرغم من أن نص المسألة يوحي بأنها صائبة فإن هذا ليس كافيًا لضمان صوابها. المسائل التي نواجهها في حياتنا اليومية لها مثل هذه الصفات لأننا لا نعلم إذا كنا نطرح السؤال الصحيح أو إذا كانت إجابة السؤال صائبة أو حتى إذا كان للسؤال إجابة في المطلق. ومع أن ذلك يظهر على أنه ملاحظة غير معقولة، إلا أنها ملاحظات من واقع الحياة ولا توجد إجابات لها في الكتب الدراسية أو النقاشات الصفية.

مسألة (٥,٢,٢)

جد صيغة لمساحة المثلث تستخدم فقط أطوال أضلاعه.

الحل:

نفرض أن α، β، γ هي أطوال أضلاع كما هو مبين في الشكل رقم (٦٢).



شكل رقم (٦٢) شكل رقم (٦٣)

نحتاج إحداثيات للمثلث كما هو مبين في الشكل رقم (٦٣). عندئذ، $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$، $\beta = \sqrt{b^2 + c^2}$، $\gamma = b - a$. نقوم بإيجاد صيغة لمساحة المثلث بدلالة a، b، c ثم نستخدم ذلك لإيجاد المساحة بدلالة α، β، γ. لنفرض أن A هي مساحة المثلث. عندئذ،

$$A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}(b-a)c = \frac{1}{2}\gamma c\,.$$

وبهذا فإننا نحصل على الصيغة المطلوبة للمساحة إذا استطعنا إيجاد c بدلالة α، β، γ. ولهذا الغرض نحتاج لحلِّ نظام المعادلات:

$$\alpha^2 = a^2 + c^2$$
$$\beta^2 = b^2 + c^2$$
$$\gamma = b - c$$

لنجد المتغير c بدلالة α، β، γ.

هذا النظام ليس خطيًّا، لذا فإن حلّه يحتاج إلى بعض الحنكة.

بالرجوع إلى الشكل، نلاحظ وجود تماثل بين الدورين اللذين يمثلاهما α و β في المسألة. ولهذا فإننا نتوقع أن يوجد تماثل بين α و β في الصيغة التي سنحصل عليها للمتغير c. إذن، يكون من الطبيعي دراسة الصيغة $\alpha^2 + \beta^2$. ولهذا نجد أن:

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2 + 2c^2$$

وبطرح $\gamma^2 = (b-c)^2$ من الطرفين والتبسيط نرى أن:

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 2c^2 + 2ab \qquad (*)$$

صيغة متماثلة أخرى في α و β هي $\alpha\beta$. ولكن هذا يحتاج إلى ظهور جذور غير مرغوب فيها. لذا نأخذ $\alpha^2\beta^2$ عوضاً عن ذلك. إذن:

$$\alpha^2\beta^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + c^2) = a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 + c^4 \qquad (**)$$

الآن، من المتوقع أن نقوم بجمع (*) و (* *) لكن ذلك سيسبب لنا إشكالاً لأن حدود (*) من الدرجة الثانية وحدود (* *) من الدرجة الرابعة، وعوضاً عن ذلك نقوم أولاً بحساب:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2c^2 + 2ab)^2 = 4c^4 + 4a^2b^2 + 8abc^2 \qquad (***)$$

لكي نستطيع اختصار الحدود المتشابهة بين (* * *) و (* *) نحسب:

$$\begin{aligned}4(\alpha^2\beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 &= 4(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 + c^4)\\ &\quad -(4c^4 + 4a^2b^2 + 8abc^2)\\ &= 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 8abc^2\\ &= 4c^2(b-a)^2\\ &= 4c^2\gamma^2\end{aligned}$$

إذن،

$$c = \frac{\sqrt{4(\alpha^2\beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}}{2\gamma}$$

وبهذا نكون قد وجدنا c بدلالة α، β، γ فقط. وأخيراً فإن مساحة المثلث هي:

$$A = \frac{1}{2}\gamma c = \frac{1}{4}\sqrt{2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}\,.$$

لاحظ أن هذه الصيغة متماثلة في α، β، γ. أي أن تبديل α، β، γ لن يغير الصيغة. ماذا تقول عن ذلك؟ فكر ملياً! تقدم بعض الكتب (انظر: [CRC] الصيغة

التقليدية التالية لمساحة المثلث:

$$A=\sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}$$

حيث $s=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ هو نصف محيط المثلث. أثبت أن الصيغتين لمساحة المثلث هما بالفعل متكافئتان. □

(٣,٢) مسائل هندسية متفرقة
Miscellaneous and Exotic Geometry Problems

يحتوي هذا البند على مسائل متفرقة في الهندسة (معظمها مسائل في الهندسة المستوية) التي لا يمكن تصنيفها على أنها تنتمي إلى فئة عيارية. الهدف من تقديم مثل هذه المسائل هو توضيح عدم وجود حدود للتفكير الإنساني وعلى الأخص في أساليب حلّ المسائل. وعلى الرغم من أن هذا الكتاب مقسماً إلى مواضيع، إلا أنه من المستحيل تقسيم حل المسائل إلى مواضيع لأنه عند محاولتك حل مسألة يكون من غير المناسب أن تقول: "هذه مسألة هندسة لذا يجب استخدام هذا الطريق لحلّها". لأنه من المستحيل معرفة جميع الطرق الملائمة لذا فيجب أن يكون تفكيرك منفتحاً على جميع الخيارات. لذا، نستطيع القول: نعم، مسائل هذا البند هندسية لكننا نستخدم أساليب مختلفة لحلّها.

مسألة (١,٢,٢)

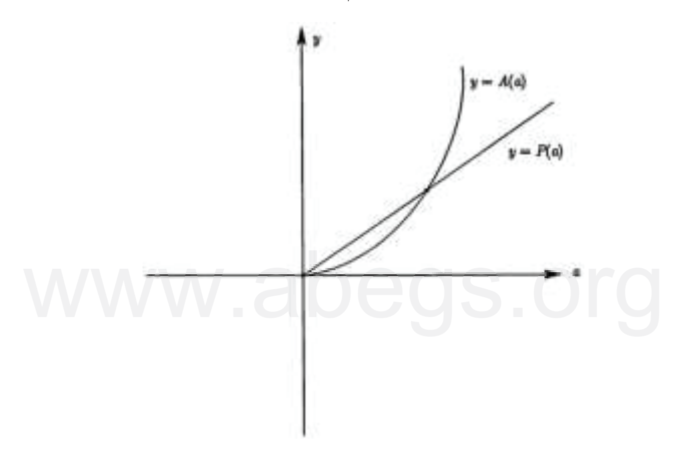
ليكن T مثلثاً معطى في المستوى. أثبت وجود مثلث آخر يشبه T ومساحته تساوي محيطه.

الحل:

لنفرض أن P محيط المثلث T وأن A مساحته. لكل $a>0$، افرض أن aT هو المثلث الذي نحصل عليه من T بتكبير (أو تصغير) أضلاع T بمقدار a. على سبيل

المثال، إذا كان $a = 2$ فإن $2T$ هو مثلث طول كل من أضلاعه ضعف طول كل من أضلاع T، وإذا كان $a = \frac{1}{2}$ فإن $T\ \frac{1}{2}$ هو مثلث طول كل من أضلاعه نصف طول كل من أضلاع T. أما إذا كان $a = 1$ فإن $1T$ هو T.

الآن، ارسم شكلين على نفس مستوى الإحداثيات يبينان المحيط $P(a)$ والمساحة $A(a)$ للمثلث aT حيث المحور الأفقي هو محور a والمحور الرأسي إما $y = P(a)$ أو $y = A(a)$ (انظر: الشكل رقم ٦٤).



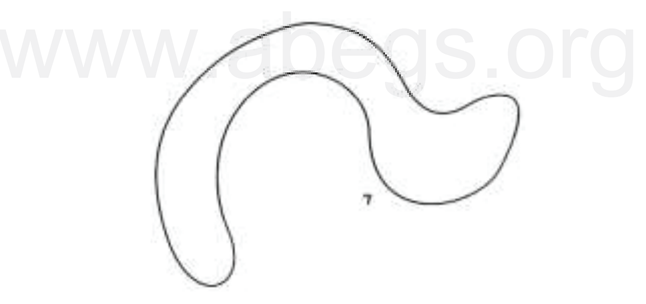
شكل رقم (٦٤)

الآن، محيط المثلث يجب أن يكون دالة خطية في a لأنه عند تكبير (أو تصغير) المثلث بمقدار a فإن كل من الأضلاع يكبر (أو يصغر) بمقدار a. وبهذا فالمحيط هو مضاعف للمقدار a. إذن، بيان $P(a)$ خط مستقيم يمرُّ بنقطة الأصل وميله موجب. في الحقيقة $P(a) = P \times a$. أما المساحة فهي دالة تربيعية في a لأنه عند تكبير (أو تصغير) المثلث بمقدار a فإن كل من قاعدته وارتفاعه يكبر (أو يصغر) بمقدار a. لذا فالمساحة تكبر (أو تصغر) بمقدار a^2. إذن، بيان $A(a)$ هو قطع مكافئ مفتوح للأعلى رأسه نقطة الأصل. في الحقيقة، $A(a) = A \times a^2$.

مـن الشـكل رقـم (٦٤)، نجـد مباشـرة أن $y = P(a)$ و $y = A(a)$ يتقاطعـان في نقطتين تقعان في الربع الأول. نقطة التقاطع الأولى هي نقطة الأصل (هذه الحقيقة ليست بذات أهمية). أما النقطة الثانية فهي عند $a = \dfrac{P}{A}$ وهذه هي النقطة التي تهمنا لأنها قيمة غير صفرية يكون عندها محيط aT يساوي مساحته. وبما أن aT يشبه T فإننا نكون قد انتهينا من حل المسألة. □

مسألة (٢,٣,٢) [مسألة متقدمة]

لنفرض أن $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ منحنى مغلق لا يقطع نفسه. إن هذا يعني أن γ دالة مجالها الفترة المغلقة $[0,1] = \quad x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1$ ومجالها المقابل مجموعة جميـــع الأزواج المرتبـــة الحقيقـــة. لاحـــظ أننـــا نفـــترض أن $\gamma(1) = \gamma(0)$، لكـــن $\gamma(a) \neq \gamma(t)$ فيما عدا ذلك (انظر: الشكل رقم ٦٥).

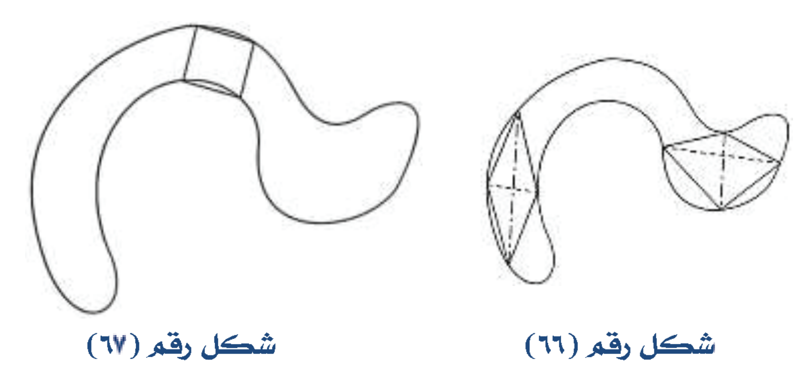


شكل رقم (٦٥)

أثبـت وجـود أربـع نقـاط A، B، C، D تقـع علـى هـذا المنحنـى بحيـث تكـون رؤوس مستطيل.

الحل:

في الشـكل رقـم (٦٦) التـالي، لـدينا شـكل ربـاعي علـى اليسـار رؤوسـه تقـع علـى المنحنـى المعطى ولـدينا أيضـًا شـكل ربـاعي علـى اليمـين رؤوسـه تقـع أيضـًا علـى المنحنـى المعطى. القطران في كل من الرباعيين مختلفان.



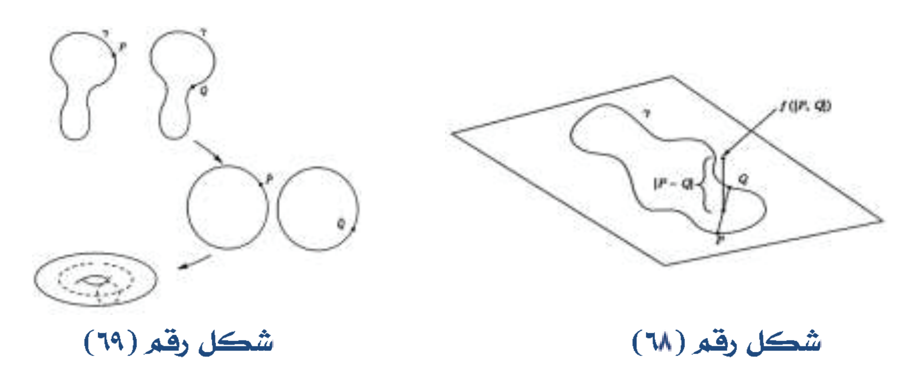
شكل رقم (٦٧) شكل رقم (٦٦)

تخيل الآن، أننا قمنا بإعادة تشكيل الشكل الرباعي على اليسار بشكل متصل بتحريك الرؤوس على المنحنى. لاحظ أن قطر الشكل الرباعي على اليسار المرسوم بقطع منفصلة أطول من القطر المرسوم بنقاط وأن قطر الشكل الرباعي على اليمين المرسوم بقطع منفصلة أقصر من القطر المرسوم بنقاط. لذا فإنه من الممكن نجد وضعًا يكون فيه القطر المرسوم بقطع منفصلة يساوي القطر المرسوم بنقاط (انظر: الشكل رقم ٦٧). إذا تمكنا أيضًا من جعل هذين القطرين ينصفان بعضهما البعض فإن الشكل الرباعي سيكون مستطيلاً.

إن الوصف الذي قدمناه هو كل بسيط لما يسمى "الطريقة المتصلة- continuity method". في الحقيقة إن هذا التبرير وحده ليس كافيًا لتحديد المستطيل المطلوب، ولكننا بحاجة إلى طريقة متصلة أكثر تطورًا بحيث تتابع التغير في طول القطرين ومركزهما معًا. لذا فإننا نلفت انتباه القارئ أننا سنستخدم فكرتين متقدمتين لإنجاز ذلك. لذا فمن غير المتوقع أن تستوعب الحل تمامًا عند قراءته للمرة الأولى لكنه يقدم لنا أفكارًا هندسية جديدة.

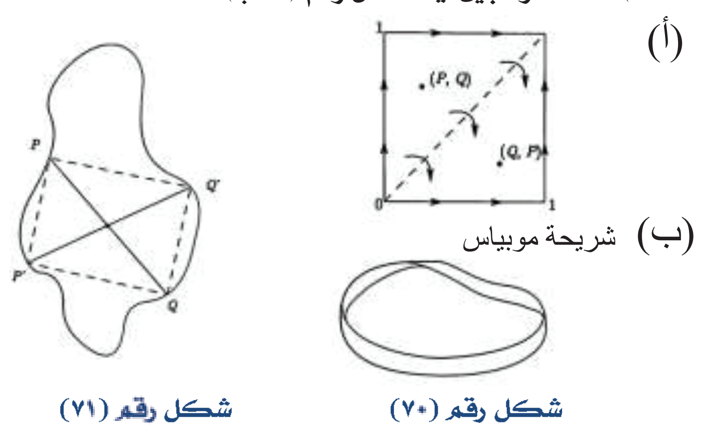
لنأخذ الآن جميع الأزواج غير المرتبة لعناصر γ. أي نعتبر أن الزوج المرتب (P,Q) يساوي (Q,P) (سنعود لاحقًا لهذه الفكرة لنرى ما تمثله هندسيًا). لنرمز لهذه المجموعة بالرمز S ونرمز لعناصرها بالرمز $[P,Q]$. أي أن $[P,Q]$ زوج غير مرتب من نقاط γ.

الآن، تخيل أن γ واقع في المستوى xy من الفضاء ثلاثي البعد. لكل $[P,Q] \in S$، نجد نقطة منتصف القطعة $\overline{PQ}$ ونفرض أن $f([\mathrm{P},\mathrm{Q}])$ هي النقطة في الفضاء التي تقع أعلى نقطة المنتصف وتبعد عنها مسافة $|P-Q|$. (انظر: الشكل رقم ٦٨). f دالة متصلة من S إلى الفضاء الإقليدي ذي البعد الثلاثي.



شكل رقم (٦٨) شكل رقم (٦٩)

ما الشكل الهندسي التي تمثله S ؟ مجموعة الأزواج المرتبة لعناصر γ تقابل بصورة طبيعية طارة (انظر: الشكل رقم ٦٩). لكننا في الحقيقة عقدنا الوضع عندما جعلنا $(P,Q) = (\mathrm{Q},\mathrm{P})$. الشكل رقم (٧٠ أ) يبين ذلك. الشكل الهندسي الذي ينتج عن ذلك يسمى سطح "غير قابل للتوجيه non orientable". في الحقيقة إن ذلك هو شريحة موبياس (Möbius strip) كما هو مبين في الشكل رقم (٧٠ ب).



شكل رقم (٧٠) شكل رقم (٧١)

ولكن الدالة f هي دالة متصلة من S إلى الفضاء ثلاثي البُعد. إذا كانت f احادية فإن صورتها هي تحقيق على أن S مجموعة جزئية من الفضاء ثلاثي البُعد. وهذا لا يؤدي إلى تناقض لأن الطارة مع المطابقات التي عملناها تكافئ شريحة موبياس. لكننا سنحصل على تناقض مما يلي: الضلع المحدود من السطح المطمور (embedded surface) هو منحنى بسيط مغلق وذلك بوصله مع قرص تبولوجي لجعل السطح مغلق. النتيجة هي "مقطع عرضي لغطاء- cross cap". أي إنها مطابقة لمستوى إسقاط عند طمره في سطح ثلاثي البُعد. ومن المعروف أن هذا مستحيل [يمكنك طلب المساعدة لتوضيح هذه الفكرة]. إذن، f لا يمكن أن تكون أحادية. ماذا يعني ذلك؟

إن ذلك يعني وجود زوجين غير مرتبين $[P,Q]$ و $[P',Q']$ لها الصورة نفسها تحت تأثير f. أي أن للقطعتين المستقيمتين $\overline{PQ}$ و $\overline{P'Q'}$ نقطة المنتصف نفسها. إضافة إلى ذلك فإن $\left|\overline{P'Q'}\right| = \left|\overline{PQ}\right|$ لأن ارتفاع النقطتين $f([P,Q])$ و $f([P',Q'])$ أعلى المستوى xy هو نفسه.

الآن، بالرجوع إلى الشكل رقم (٧١) نرى أن كون $\overline{PQ}$ و $\overline{P'Q'}$ لها الطول نفسه ونقطة المنتصف نفسها وهذا يعني أنهما قطرا مستطيل. أي أن P، Q، P'، Q' نقاط تقع على المنحنى γ وهي رؤوس مستطيل. □

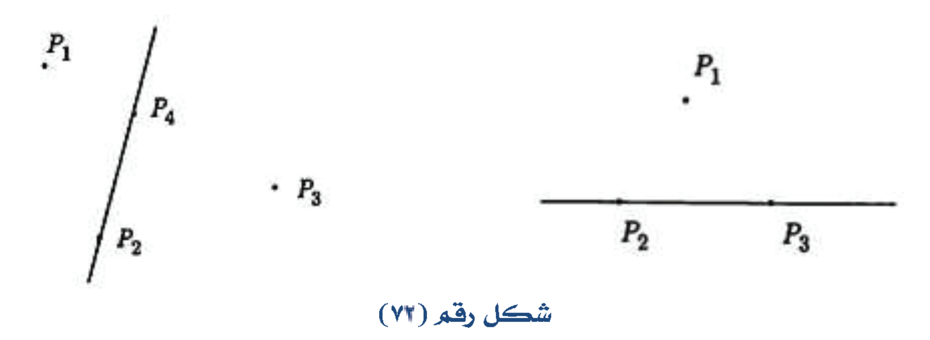
إن مسألة إيجاد أربع نقاط على المنحنى γ المقدم في المسألة (٢,٣,٢) بحيث تكون رؤوس مربع مسألة تنتظر حلاً (على الأقل عند صدور هذا الكتاب).

مسألة (٢,٣,٢)

لتكن $P_1, P_2, \ldots, P_k$ عدد منته من النقاط في المستوى ليست جميعاً على استقامة واحدة. أثبت وجود مستقيم في المستوى يمر بنقطتين فقط من هذه النقاط.

الحل:

انظر: الشكل رقم (٧٢) لغرض توضيح الفكرة.



شكل رقم (٧٢)

الجزء الأول من الشكل يبين ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ومستقيم يمرُّ بنقطتين فقط. والجزء الثاني من الشكل يبين أربع نقاط ليست على استقامة واحدة ومستقيم يمرُّ بنقطتين فقط منها.

الآن، إذا كان لدينا عدد كبير لكنه منتهي من هذه النقاط المرسومة عشوائيًّا في المستوى فكيف يمكن إيجاد نقطتين منها ومستقيم يمرُّ بهاتين النقطتين فقط؟ نستخدم في حلّ هذه المسألة أحد أهم أساليب حلول المسائل في الرياضيات وهو مبدأ التطرفية (extremal principle).

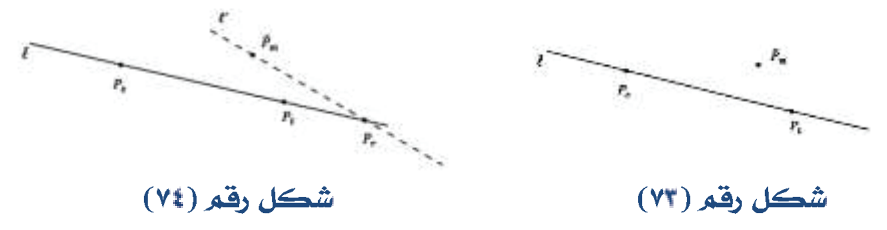
لتكن T مجموعة جميع الأزواج المرتبة (ℓ, P_m) حيث ℓ مستقيم يمرُّ بنقطتين على الأقل من النقاط P_j، ولنفرض أن P_m نقطة لا تقع على المستقيم ℓ. (ضمان وجود P_m هو فرضنا أن النقاط ليست جميعًا على استقامة واحدة). نعرف الدالة $f : T \to R$ بالقاعدة:

$f\ (\ell, P_m)\ = P_m$ المسافة من ℓ إلى.

لاحظ أن قيم هذه الدالة موجبة دائمًا، وأن مجالها مجموعة منتهية (لأن عدد كل من المستقيمات ℓ والنقاط P_m منتهي). لذا يوجد زوج مرتب $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ بحيث يكون $f\ (\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ أصغر. ندعي أن المستقيم $\tilde{\ell}$ هو المستقيم الذي يحقق المطلوب.

يبين الشكل رقم (٧٣) لنا أحد خيارات المستقيم $\tilde{\ell}$ والنقطة $\tilde{P}_m$. لاحظ أن $\tilde{\ell}$ يمر بنقطتين على الأقل من النقاط P_j، وهذا ما يوضحه أيضاً الشكل رقم (٧٣).

سنبرهن الآن أن $\tilde{\ell}$ لا يمر بنقطة ثالثة P_r .



شكل رقم (٧٣) شكل رقم (٧٤)

لنفرض أن P_r نقطة ثالثة يمرُّ بها المستقيم $\tilde{\ell}$ كما هو مبين في الشكل رقم (٧٤). عندئذ، المستقيم ℓ' المار بالنقطتين $\tilde{P}_m$ و P_r أقرب إلى P_t من $\tilde{P}_m$ إلى $\tilde{\ell}$. وهذا يناقض أصغرية $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ f .

وإذا كانت P_r كما هو مبين في الشكل رقم(٧٥) فإن المستقيم ℓ'' المار بنقطتين $\tilde{P}_m$ و P_s أقرب إلى P_r من $\tilde{P}_m$ إلى $\tilde{\ell}$ وهذا أيضًا يناقض أصغرية $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ f .



شكل رقم (٧٥) شكل رقم (٧٦)

وأخيرًا إذا كانت P_r كما هو مبين في الشكل رقم (٧٣) فإن المستقيم ℓ''' المار بالنقطتين $\tilde{P}_m$ و P_r أقرب إلى P_s من $\tilde{P}_m$ إلى $\tilde{\ell}$ وهذا يناقض مرة أخرى أصغرية $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ f .

وبهذا نكون قد أثبتنا بالتفصيل أن اختيارنا للزوج الأصغري $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ المبين في الشكل رقم (٧٣) سيؤدي إلى أن $\tilde{\ell}$ يمر بنقطتين فقط من النقاط P_j . أنت مدعو لدراسة خيارات أخرى لترى عدم وجود نقطة ثالثة يمرُّ بها المستقيم $\tilde{\ell}$ وإلا سنحصل على تناقض لأصغرية $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ f . وبهذا نكون قد أثبتنا أن المستقيم $\tilde{\ell}$ المقابل للزوج المرتب $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ الذي يعطي قيمة صغرى للدالة f يمر بنقطتين فقط من النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_k$. □

مسألة (٢,٣,٤)

أثبت أن المسألة السابقة يمكن أن تكون خاطئة إذا كان عدد النقاط غير منته.

[إرشاد: ادرس النقاط الشبكية].

مسألة تحدي (٢,٣,٥)

قدم حلاً للمسألة السابقة لا يعتمد على مبدأ التطرفية وذلك بتقسيم المسألة إلى حالات ودراسة كل من هذه الحالات على حدة.

قدمنا في المسألة (١,٤,٣) من البند (١,٤) مفهوم الرسومات على الكرة وبرهنا صيغة أويلر. الرسم التام (complete graph)* الذي رؤوسه $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (عددها k) هو الرسم الذي فيه كل رأسين مختلفين متجاورين (أي يوجد ضلع وحيد بينهما). هذه الأضلاع لا تتقاطع لأن تقاطع أي ضلعين ينتج عنه رأس جديد. الشكل رقم (٧٧) يبين رسم تام عدد رؤوسه 4 . لاحظ أنه يمكن النظر إليه كمجموعة جزئية من الكرة بدون تقاطعات إضافية. تأكد من وجود ضلع بين أي رأسين مختلفين (عدد هذه الأضلاع يساوي 6).



شكل رقم (٧٧)

مسألة (٢,٣,٦)

أثبت استحالة اعتبار الرسم التام الذي عدد رؤوسه 5 كمجموعة جزئية من كرة**.

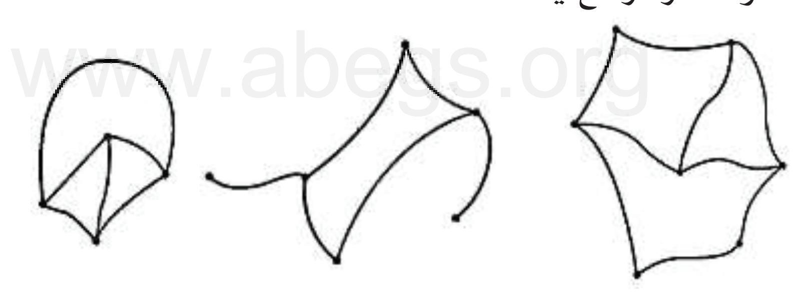
---

* المترجمان: الاسم الشائع لهذا الرسم هو الرسم تام المستوي.

** المترجمان: أي أثبت أنه غير مستوٍ.

الحل:

نستخدم صيغة أويلر لحل هذه المسألة. لنفرض لغرض التناقض أنه يمكن اعتبار الرسم التّام الذي عدد رؤوسه 5 كمجموعة جزئية من كرة. من الواضح أن عدد الرؤوس يساوي 5. إذن $V = 5$، عدد الأضلاع يساوي 10 لأنه يوجد ضلع بين كل رأسين مختلفين، لذا فعدد الأضلاع هو عدد طرق اختيار زوج من الرؤوس من مجموعة مكونة من 5 رؤوس. أي $\binom{5}{2} = 10$. إذن، $E = 10$. كم عدد الدول (الوجوه)؟ الشكل رقم (٧٨) يبين لنا عدد من الرسومات. لاحظ أنه يوجد وجه يحده أكثر من 3 أضلاع إذا وفقط إذا وجدت بعض أزواج الرؤوس غير المتجاورة (أي لا يوجد ضلع بينها). لكن في حالة وجود ضلع وحيد بين كل رأسين مختلفين فإن جميع الوجوه يجب أن تكون مثلثات وهذا هو الوضع في حالتنا.



شكل رقم (٧٨)

إذن، عدد الوجوه هو عدد المثلثات التي يمكن تكوينها من خمس رؤوس، هذا العدد هو $\binom{5}{3} = 10$. إذن، $F = 10$. باستخدام صيغة أويلر نجد أن:

$$2 = V - E + F = 5 - 10 + 10 = 5$$

وهذا مستحيل. وبالتالي نلخص إلى استحالة اعتبار الرسم التام الذي عدد رؤوسه 5 كمجموعة جزئية من كرة. (نص هذه المسألة بلغة الرياضيات هو استحالة طمر الرسم التَام الذي عدد رؤوسه 5 في كرة). وبهذا ينتهي إثبات المسألة. □

مسألة تحدي (٢,٣,٧)

أثبت إمكانية طمر الرسم التّام الذي عدد رؤوسه 5 في طارة.

مسألة تحدي (٢,٣,٧)

أثبت إمكانية طمر الرسم التام الذي عدد رؤوسه 5 في طارة.

مسألة تحدي (٢,٣,٨)

ما أكبر عدد k بحيث يمكن طمر الرسم التام الذي عدد رؤوسه k في طارة ؟

مسألة تحدي (٢,٣,٩)

ما أكبر عدد k بحيث يمكن طمر الرسم التام الذي عدد رؤوسه k في طارة تحتوي على ثقبين (انظر: الشكل رقم ٧٩) ؟



شكل رقم (٧٩)

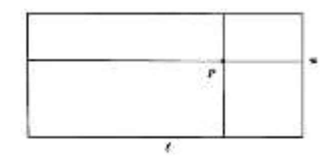
نقول أن القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ وتر (chord) في المنطقة المستوية U إذا وقعت A و B على حدود U. فيما يلي ندرس فقط المناطق المحدبة المغلقة [المنطقة المحدبة U هي المنطقة التي تحقق ما يلي: إذا كانت P و Q نقطتين داخليتين في المنطقة U فإن القطعة $\overline{PQ}$ تقع داخل U]. لذا فإن الوتر يقع دائماً داخل المنطقة المحدبة. نقول عن نقطة داخلية P في منطقة: إنها نقطة تساوي أوتاراً (equichordal point) إذا كانت أطوال جميع الأوتار التي تمر بالنقطة P متساوية.

مسألة (٢,٣,١٠)

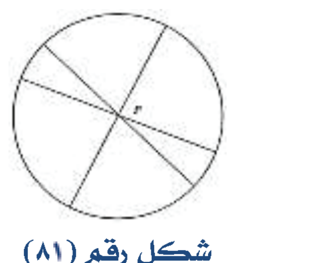
هل تحتوي جميع المناطق المحدبة المغلقة على نقطة تساوي أوتاراً ؟ هل توجد منطقة محدبة مغلقة تحتوي على نقطة تساوي أوتار؟

الحل:

لا توجد نقطة تساوي أوتارًا للمستطيل المبين في الشكل رقم (٨٠). ولرؤية ذلك، لاحظ أنه لأي نقطة P داخل المستطيل لا بد من وجود وتر أفقي طوله ℓ ووتر رأسي طول w يمران بالنقطة P. وبما أن $w \neq \ell$ فمن غير الممكن أن تكون P نقطة تساوي أوتارًا.



شكل رقم (٨٠)



شكل رقم (٨١)

مركز القرص المبين في الشكل رقم (٨١) هو النقطة P وهي نقطة تساوي أوتارًا لأن أي وتر يمرُّ بالنقطة P هو قطر للدائرة التي تحيطه وأن جميع أطوال الأقطار متساوية. □

مسألة (١١,٣,٢)

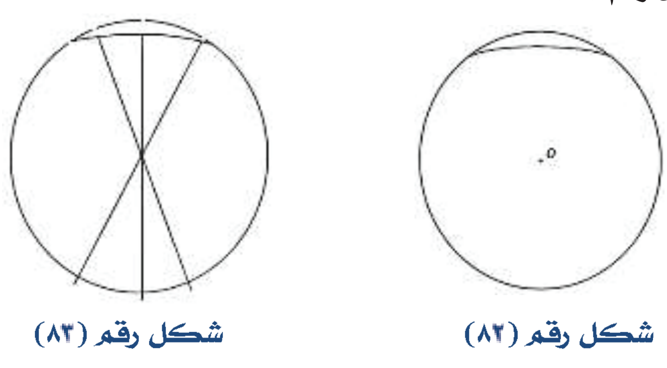
هل يوجد شكل محدب مغلق مستوٍ (عدا القرص) بحيث يحتوي على نقطة تساوي أوتارًا؟

الحل:

قبل أن تقرأ الحل قم برسم بعض الأشكال يدويًّا (أو بالاستعانة ببرامج الرسم على جهاز الحاسب إذا كان ذلك متوافرًا). هل لديك تخمين للإجابة عن السؤال؟

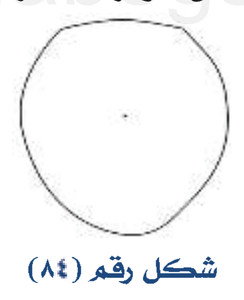
في الحقيقة، يوجد عدد غير منته من الأشكال المحدبة المغلقة والمستوية التي تحتوي على نقاط تساوي أوتار. نقدم الآن طريقة لإنشاء مثل هذه المناطق. نبدأ بمنطقة تحتوي على نقطة تساوي أوتار وهي القرص المبين في الشكل رقم (٨١). يمكن اعتبار هذه المنطقة على أنها اتحاد جميع الأوتار التي تمرُّ بنقطة الأصل. لاحظ أن هذه

الأوتار تتقاطع فقط عند نقطة الأصل. الأن، نقوم بتحريك بعض هذه الأوتار.(انظر: الآن إلى الشكل رقم (٨٢).



شكل رقم (٨٢) شكل رقم (٨٣)

رسمنا منحياً مسطحاً أعلى القرص. نقوم الآن بإزاحة جميع الأوتار التي تمرُّ بنقطة الأصل وتقطع هذا المنحنى إلى الأسفل بالمقدار الذي يجعل نقاط نهاية هذه الأوتار تقع على المنحنى كما هو مبين في الشكل رقم (٨٣). المنطقة المطلوبة هي المنطقة التي تنتج عن إزاحة هذا العدد غير المنته من الأوتار كما هو مبين في الشكل رقم (٨٤).



شكل رقم (٨٤)

لاحظ أن هذه المنطقة هي مغلقة ومحدبة وتحتوي نقطة تساوي أوتاراً لأن لها نفس أوتار القرص ما عدا البعض منها قد تمت إزاحته إلى الأسفل. لاحظ أيضاً إن هذه المنطقة ليست قرصاً. وبهذا نكون قد وجدنا منطقة جديدة تحتوي نقطة تساوي أوتار. □

مسألة تحدي (١٢،٣،٢)

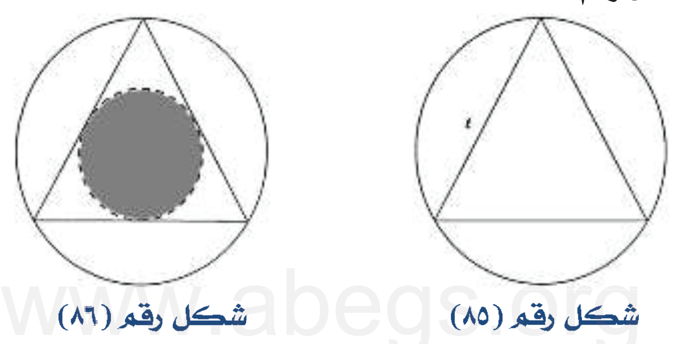
أنشئ منطقة جديدة مغلقة ومحدبة وتحتوي على نقطة تساوي أوتاراً بأخذ وتر طوله ثابت (وليكن إبرة مغموسة بحبر) وتدويره $360°$ بحيث تمرّ الإبرة خلال نقطة

ثابتة. إحدى المناطق التي يمكن أن تنشأ عن ذلك هي "مثلث دائري".

إن مسألة وجود منطقة محدبة مغلقة تحتوي على نقطتي تساوي أوتار مسألة تنتظر حلاً.

مسألة (١٣,٣,٢) [محيرة بيرتراند – Bertrand`s paradox]

خذ دائرة نصف قطرها 1. ارسم مثلثًا متساوي الأضلاع طول ضلعه ℓ كما هو مبين في الشكل رقم (٨٥).



شكل رقم (٨٥) **شكل رقم (٨٦)**

اختر وترًا d من الدائرة طوله m عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون m (طول d) أكبر من ℓ؟

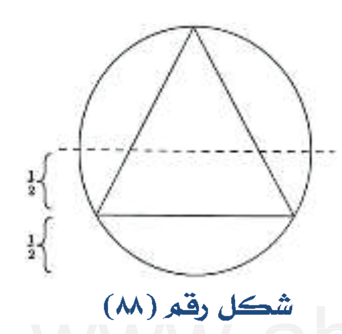
الحل:

"المحير" في هذه المسألة هو وجود ثلاثة حلول لها بإجابات مختلفة. نقدم هذه الحلول التي تظهر على أنها متناقضة وفي نهاية الحلول سنوضح سبب وجود مسائل من هذا النوع لها ثلاثة حلول مختلفة.

الحل الأول:

يبين الشكل رقم (٨٦) لنا قرصًا مفتوحًا مظللاً حيث الدائرة التي تحدّه تمس داخليًا المثلث المتساوي الأضلاع المرسوم داخل الدائرة الكبيرة. إذا اخترنا وترًا d عشوائيًّا ووقع مركزه داخل القرص المظلل فإن $m > \ell$. أما إذا وقع الوتر d خارج القرص

المظلـــل فـــإن $m \leq \ell$. إذن، احتمـــال أن يكـــون طـــول d أكـــبر مـــن ℓ هـــو $\frac{\text{مساحة القرص المظلل}}{\text{مساحة القرص الوحدة}}$. لكن من الشكل رقم (٨٧) نجد أن نصف قطر القرص المظلل $\frac{1}{2}$ ومن ثم مساحته تساوي $\frac{\pi}{4}$. ومساحة قرص الوحدة تساوي π . إذن، احتمال أن يكون طول d أكبر من ℓ يساوي $\frac{1}{4}$.



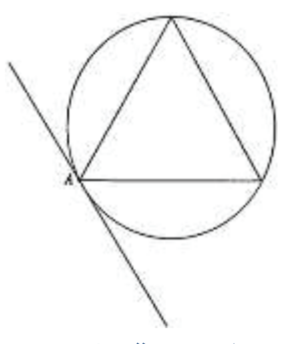
شكل رقم (٨٨)

شكل رقم (٨٧)

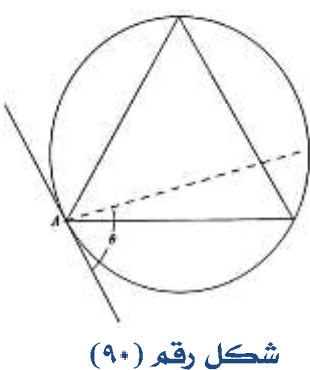
الحل الثاني:

يبين الشكل رقم (٨٨) لنا إمكانية افتراض أن الوتر العشوائي المختار هو وتر أفقي (يمكن دراسة أوضاع أخرى للوتر بصورة مشابهة). لاحظ أنه إذا كان الارتفاع من قاعدة المثلث إلى الوتر d أصغر من أو يساوي $\frac{1}{2}$ فإن $m \leq \ell$ وإذا كان هذا الارتفاع أكبر من $\frac{1}{2}$ (لا يزيد على 1) فإن $m > \ell$. إذن، احتمال أن يكون طول d أكبر من ℓ هو $\frac{1}{2}$.

الحل الثالث:



شكل رقم (٨٩)



شكل رقم (٩٠)

بالنظر إلى الشكل رقم (٨٩)، نرى أنه من الممكن فرض أن إحدى النقاط الواقعة على الوتر المختار عشوائيًّا هي الرأس A للمثلث. لنفرض أن θ هي الزاوية التي رأسها A وضلعاها هما المماس للدائرة عند A والوتر المرسوم من A (كما هو مبين في الشكل رقم ٩٠). إذا كانت $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ فإن طول الوتر d أصغر من أو يساوي ℓ. أما إذا كانت $60^\circ < \theta < 120^\circ$ فإن طول الوتر d أكبر من ℓ. وأما إذا كانت $120^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ فإن طول الوتر d أصغر من أو يساوي ℓ. إذن، فإن احتمال أن يكون طول الوتر d أكبر من ℓ هو $\frac{1}{3} = \frac{60}{180}$. □

كيف يمكن أن توجد ثلاث إجابات مختلفة لمسألة: الاحتمالات $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{2}$؟ وأن جميع هذه الحلول صائبة! للإجابة عن هذا السؤال هي ملاحظة أن فضاء الاحتمالات في حالتنا هذه هو فضاء غير منته. أي يوجد عدد غير منته من المخرجات (يوجد عدد غير منته من الأوضاع المختلفة للوتر)، لهذا فإنه يوجد عدد غير منته من الطرق لحساب احتمالات المخرجات المختلفة.

إن وجود مثل هذه المحيرات أدى إلى اعتبار نظرية الاحتمالات موضوع غير دقيق واستمرت هذه النظرة لسنوات عديدة إلى أن تمَّ اكتشاف موضوع في الرياضيات

وهو "نظرية المقياس- measure theory" التي قدمها هنري لوبيغ (Henri Lebesgue) في العام 1906 . منذ ذلك الحين وُضعت نظرية الاحتمالات في مسارها الصحيح. مثل هذه المسائل يتم مناقشتها في مقرر متقدم في الاحتمالات.

(٤,٢) هندسة المجسمات Solid Geometry

لم تعدّ هندسة المجسمات من الموضوعات الأساسية التي تدرس في المرحلة الثانوية أو حتى الجامعية، ومن الموضوعات المهمة الأخرى التي تمَّ إهمالها هو حساب المثلثات الكروية. ومع ذلك فإننا نصادف بعض مفاهيم هندسة المجسمات عند دراسة مقررات التفاضل والتكامل والتحليل الحقيقي. مسائل هذا الفصل لا تفترض معرفة مسبقة لهندسة المجسمات وأن حلول بعضها يعتمد على الأفكار التي قدمناها سابقًا في هذا الكتاب وحلول البعض الآخر يتطلب فقط بعض الصبر والتصميم.

كثير الوجوه (polyhedron) هو مجسم سطحه يتكون من اتحاد عدد منته من المضلعات المستوية. مثل المجسمات الأفلاطونية (المثالية)، كالمكعب أو رباعي الوجوه أو اثني عشري الوجوه. نركز اهتمامنا هنا على كثيرات الوجوه التافهة تبولوجيًّا(أي أنها لا تحتوي على ثقوب). فمثلاً، لن نتعرض إلى كثيرات وجوه تأخذ شكل كعكة الدونات أو الاسطوانة.

مسألة (١,٤,٢)

أثبت أن كثير الوجوه الذي يحتوي على ثلاثة وجوه مثلثية تلتقي عند كل من رؤوسها يجب أن يكون عدد وجوهه يساوي 4 .

الحل:

نستخدم صيغة أويلر المقدمة في البند (١,٤) :

$$V - E + F = 2$$

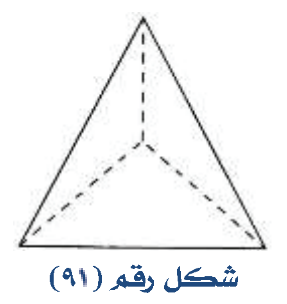
أثبتنا هذه الصيغة للرسومات على كرة، ولكن ليس صعباً أن نرى أنه يمكن إعادة تشكيل أي كثير وجوه بحيث تقع حدوده على كرة. لذا يمكن تطبيق صيغة أويلر لكثير وجوه مسألتنا.

لنفرض أن V هو عدد الرؤوس. لاحظ وجود ثلاثة وجوه مثلثية تلتقي عند كل من الرؤوس. هل هذا يعني أن $E = 3V$ ؟ هذا ليس صحيحاً، لأننا قمنا بعد كل ضلع مرتين (مرة لكل رأس واقع عليه). إذن، $E = \frac{3}{2}V$.

وبالمثل، بما أن لدينا ثلاثة وجوه مثلثية تلتقي عن كل الرؤوس فإننا سنعتقد أن $F = 3V$. لكننا نكون قد عددنا كل وجه ثلاث مرات (مرة لكل رأس). إذن، $F = \frac{3V}{3} = V$. الآن، باستخدام صيغة أويلر نجد أن :

$$2 = V - E + F = V - \frac{3V}{2} + V$$

أي أن $V = 4$. إذن، $E = \frac{3V}{2} = 6$ و $F = V = 4$. إن هذا كثير وجوه تقليدي (انظر: الشكل رقم ٩١). □



شكل رقم (٩١)

مسألة تحدي (٢،٤،٢)

إذا كانت جميع وجوه كثير وجوه هي مربعات. ثلاثة منها تلتقي عند كل من الرؤوس فإن كثير الوجوه يجب أن يكون مكعباً.

مسألة تحدي (٢,٤,٣)

ليكن لدينا كثير وجوه يتكون من ثلاثة وجوه خماسية تلتقي عند كل رأس.

ما عدد وجوهه؟

مسألة تحدي (٢,٤,٤)

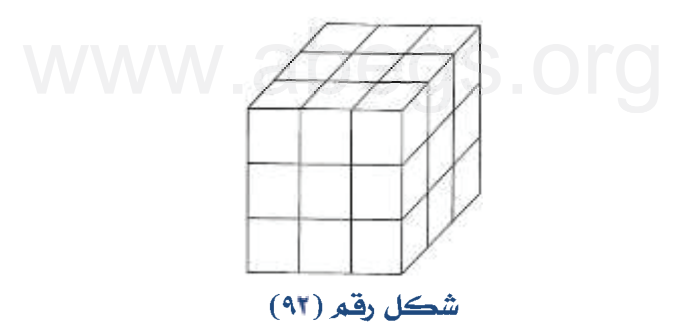
فسر استحالة وجود كثير وجوه مكون من 6 وجوه مثلثية تلتقي عند كل رأس.

مسألة تحدي (٢,٤,٥)

لدينا كثير وجوه مكون من 5 وجوه مثلثية تلتقي عند كل رأس. ما عدد وجوهه؟

مسألة (٢,٤,٦)

لدينا مكعب خشبي طول ضلعه 3 أقدام مقسم كل وجه من وجوهه إلى 9 مكعبات وحدة باستخدام 4 مستقيمات متوازية كما هو مبين في الشكل رقم (٩٢).

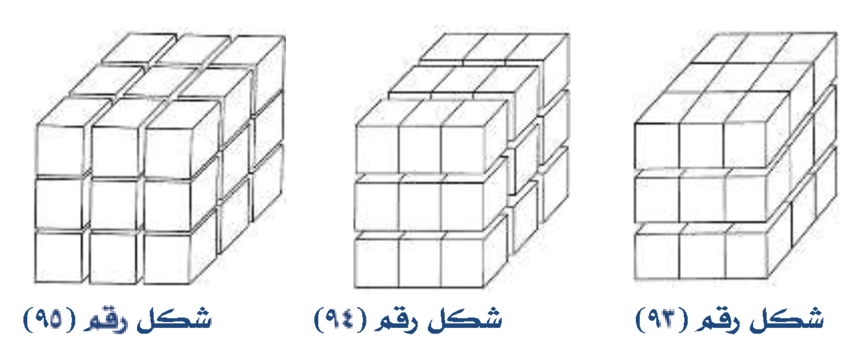


شكل رقم (٩٢)

كم عدد التقطيعات المستقيمة اللازمة باستخدام منشار لتقسيم المكعب إلى 27 مكعبًا وحده ؟ ما العدد الأصغر اللازم من هذه التقطيعات ؟

الحل:

نستخدم المنشار أولاً لقطع مستقيمين متوازيين من أحد الوجوه وبهذا نقسم المكعب إلى ثلاث شرائح ارتفاع كل منها مكعب واحد (انظر : الشكل رقم ٩٣).

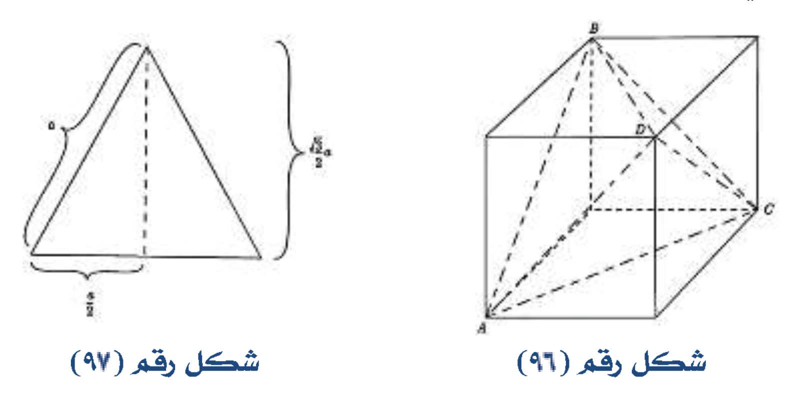


شكل رقم (٩٥)　　شكل رقم (٩٤)　　شكل رقم (٩٣)

بإبقاء الشرائح الثلاث بعضها فوق بعض نقوم بالقطع خلال مستقيمين متوازيين في الشريحة العليا لنحصل على 9 شرائح كل منها مكون من 3 مكعبات (انظر: الشكل رقم ٩٤). وأخيراً بإبقاء الشرائح كما هي، نقوم بعمل قطعين أخرين (انظر: الشكل رقم ٩٥) لفصل المكعبات الـ 27. وبهذا يكون العدد الكلي للتقطيعات اللازمة يساوي 6. هل هذا العدد أصغري؟ الإجابة هي "نعم". لاحظ أن لمركز المكعب 6 وجوه. لفصل كل من هذه الوجوه من الخشب المحيط به نحتاج إلى استخدام المنشار مرة واحدة. ولهذا نحتاج إلى 6 تقطيعات مهما كانت الطريقة المتبعة للتقطيع. □

مسألة (٧,٤,٢)

وصلنا بين أربعة رؤوس A، B، C، D من الرؤوس الثمانية لمكعب وحدة لإنشاء رباعي وجوه كما هو مبين في الشكل رقم (٩٦).



شكل رقم (٩٧)　　شكل رقم (٩٦)

ما النسبة بين المساحة السطحية للمكعب والمساحة السطحية لرباعي الوجوه؟

الحل:

مساحة كل من وجوه المكعب الستة يساوي 1. لذا فالمساحة السطحية للمكعب تساوي 6.

لرباعي الوجوه، 4 وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع. وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن طول ضلع كل من هذه المثلثات يساوي $\sqrt{2}$. لاحظ أن ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a يساوي $a\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ (انظر: الشكل رقم ٩٧). وبهذا فإن مساحته تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. في حالتنا $a = \sqrt{2}$. إذن، مساحة كل من المثلثات تساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$. [يمكن أيضاً استخدام الصيغة التي قدمناها في المسألة رقم (٥،٢،٢) لحساب مساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه]. وبما أن عدد وجوه رباعي الوجوه يساوي 4 فإن مساحته السطحية تساوي $2\sqrt{3}$. وبهذا نجد أن النسبة بين المساحة السطحية للمكعب والمساحة السطحية لرباعي الوجوه هي $\sqrt{3} = \frac{6}{2\sqrt{3}}$. □

مسألة تحدي (٢،٤،٨)

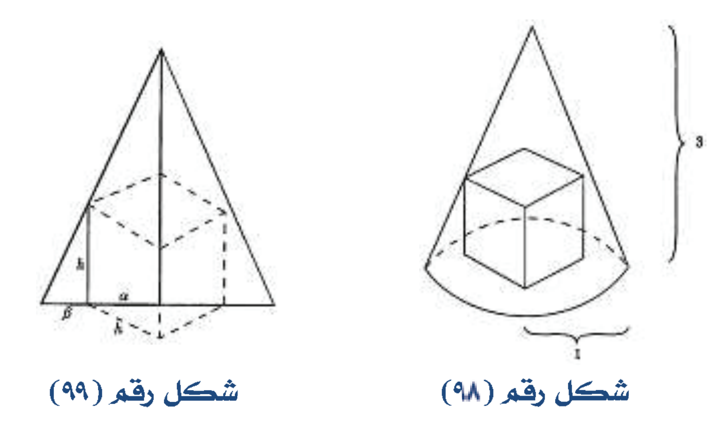
في المسألة السابقة، جد النسبة بين حجم المكعب وحجم رباعي الوجوه [إرشاد: جد ذلك بدون حسابات!]

مسألة (٢،٤،٩)

رسمنا مكعباً داخل مخروط اسطواني قائم (قاعدته دائرة) كما هو مبين في الشكل رقم (٩٨). إذا كان نصف قطر المخروط يساوي 1 وارتفاعه يساوي 3 فما حجم المكعب؟

الحل:

لإيجاد حجم المكعب نحتاج إلى معرفة طول ضلعه. بينا بعض المثلثات في الشكل رقم (٩٩).



شكل رقم (٩٨)　　　شكل رقم (٩٩)

لاحظ أن المثلثات متشابهة لأن أضلاعها متوازية. لاحظ أيضاً أن α هو نصف طول قطر قاعدة المكعب (المسافة من أحد أركان القاعدة إلى مركز القاعدة).

بالنظر إلى المثلث الصغير نجد أن $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha^2 + \alpha^2 = h^2$. ومن تشابه المثلثين نجد أيضاً أن $h = 3\beta$. وبهذا لدينا نظام مكون من ثلاث معادلات وثلاثة مجاهيل. بتعويض المعادلة الثالثة في المعادلة الثانية نجد أن $2\alpha^2 = 9\beta^2$. أي أن $\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}\beta$. وبتعويض هذه القيمة في المعادلة الأولى نجد أن $\frac{\sqrt{3}}{2}\beta + \beta = 1$. أي أن $\beta = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$. ومن ثم فإن:

$$h = 3\beta = \frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}+2}$$

وبالتالي فإن حجم المكعب V هو:

$$V = h^3 = \left(\frac{6}{3\sqrt{2}+2}\right)^3 = \frac{108}{45\sqrt{2}+58}$$ □

نقول: إن مجموعة جزئية U من الفضاء ثلاثي البُعد محدبة إذا حققت ما يلي: إذا كانت A ، B نقطتين تنتميان إلى U فإن القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تقع في U.

تكون المجموعة المحدبة مغلقة إذا احتوت جميع نقاط حدودها (boundary points).

نقول: إن النقطة P التي تنتمي إلى مجموعة محدبة مغلقة، نقطة متطرفة (extreme point) إذا لم توجد قطعة مستقيمة غير تافهة تقع في U وتحتوي P كنقطة داخلية.

مثال على ذلك: لتكن V المجموعة التي تحتوي نقاط كرة وحدة والنقاط الداخلية لكرة. عندئذ، V مجموعة محدبة مغلقة. جميع نقاطها الداخلية ليست متطرفة لأن أي نقطة داخلية تقع على قطعة صغيرة داخلية. جميع نقاط حدود V هي نقاط متطرفة لأن تقعر حدود V موجب: إذا كانت P نقطة حدودية وكانت ℓ قطعة تنتمي إلى V وتحتوي P فإن ℓ يجب أن تقع على حدود V. ومن ثم فإن طول ℓ يجب أن يساوي صفرًا.

مسألة (١٠,٤,٢)

فسر وجود نقطة متطرفة واحدة على الأقل لأي مجموعة مغلقة ومحدودة ومحدبة W.

الحل:

هذه المسالة تمرين جيد على التبرير (البرهان) غير الإنشائي (non-constractive). بما أننا لا نعرف ماهية W فهل يمكن تحديد نقطة متطرفة (بفرض وجودها)؟ بالطبع لا نستطيع. لذا يجب أن نتبع أسلوب تبرير مختلف؛ لهذا ندرس جميع الكرات المغلقة مع نقاطها الداخلية اللواتي مراكزها نقطة الأصل وتحتوي W. هذه الكرات موجودة لأن W محدودة. في الحقيقة، إذا كانت $P \in W$ وكان d هو قطر W فإن الكرة المغلقة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\|P\| + d$ ستحتوي W. الآن، افرض أن E هي مجموعة تقاطع جميع هذه الكرات المغلقة.

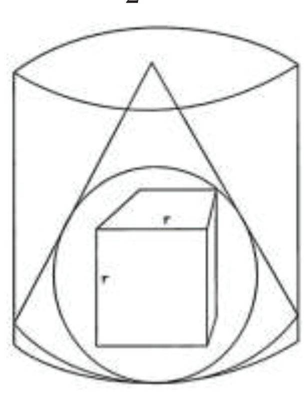
لاحظ أولاً أن E تحتوي W لأن كل كرة مغلقة من التقاطع تحتوي W.
ثانياً، E كرة مغلقة مركزها نقطة الأصل. لذا لابد من وجود نقطة Q تقع على حدود E وحدود W (لأنه لو كان غير ذلك لكانت E أصغر وهذا مستحيل). الآن، من المؤكد أن Q نقطة متطرفة للمجموعة E ومن ثم فهي نقطة متطرفة للمجموعة W. □

مسألة (١١,٤,٢)

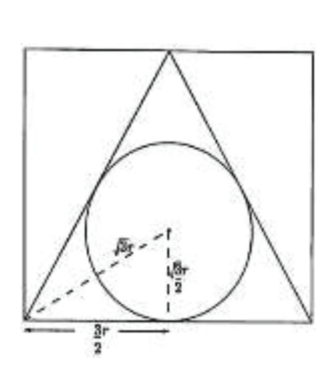
رسمنا مكعباً طول ضلعه r داخل كرة ورسمنا الكرة داخل مخروط طول حرفه الجانبي يساوي طول قطر قاعدته ورسمنا المخروط داخل اسطوانة دائرية قائمة. ما المساحة السطحية الكلية (المساحة السطحية الجانبية ومساحة القاعدتين) للاسطوانة؟

الحل:

بالنظر إلى الشكل رقم (١٠٠) نجد أن قطر الكرة يساوي $\sqrt{3}r$ (القطر الرئيس للمكعب). إذن، نصف قطر الكرة يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}r$. ومن الشكل رقم (١٠١) نجد أن قطر المخروط يساوي $3r$ (ومن ثم طول حرفه الجانبي يساوي $3r$). إذن، نصف قطر الاسطوانة الدائرية القائمة يساوي $\frac{3}{2}r$ وارتفاعها يساوي $\frac{3\sqrt{3}}{2}r$.



شكل رقم (١٠٠)



شكل رقم (١٠١)

إذن، المساحة السطحية الكلية للأسطوانة هي :

$$2\pi\left(\frac{3r}{2}\right)^2 + 2\pi\frac{3r}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}r = \frac{9}{2}\pi r^2\left[1+\sqrt{3}\right] \qquad \square$$

مسألة (١٢,٤,٢) [المجسمات الأفلاطونية]

يستخدم المصطلح "مجسم أفلاطوني" لكثير وجوه في الفضاء ثلاثي البُعد الذي يتمتع بالخاصيتين:

(أ) جميع وجوهه مضلعات منتظمة متطابقة.

(ب) يتقاطع عند كل رأس عدد متساو من الوجوه.

مثال على مجسم أفلاطوني هو المكعب حيث للمكعب ستة وجوه جميعها مربعات وتتقاطع ثلاثة وجوه عند كل رأس.

جد جميع المجسمات الأفلاطونية.

الحل:

الملفت للنظر أن عدد المجسمات الأفلاطونية يساوي 5 ويمكن إيجادها جميعًا. ولهذا الغرض نستخدم صيغة أويلر التي قدمناها في البند (٤,١):

$$V - E + F = 2$$

حيث V عدد الرؤوس، E عدد الأضلاع، F عدد الوجوه. نعتبر أن أضلاع ورؤوس المجسم الأفلاطوني تكون رسمًا مسموحًا على سطح المجسم الأفلاطوني (وهذا يكافئ توبولوجيًّا الكرة).

وبما أننا نناقش كثيرات وجوه منتظمة فإنه يوجد بعض العلاقات بين V، E، F. ونفرض أن m عدد الأضلاع التي تحد وجه وأن k عدد الأضلاع التي تتلاقى عند أي رأس. بما أن عدد الأضلاع التي تحد كل وجه هو m فإنه يمكن القول: إن mf هو عدد الأضلاع الكلي. لكن هذا ليس صحيحًا لأن كل ضلع يحد وجهان (وجه لكل من جهتي الضلع). إذن، عدد الأضلاع هو:

$$E = \frac{mF}{2} \qquad (*)$$

وبما أن كل وجه يتكون من m رأس (لأن له m من الأضلاع) وأن المقدار mF يحسب لنا كل رأس عدد k من المرات (لأن عند كل رأس تتلاقى k من الأضلاع ومن ثم k من الوجوه) فإن:

$$V = \frac{mF}{k} \qquad (**)$$

وبتعويض $(*)$ و $(**)$ في صيغة أويلر نجد:

$$\frac{mF}{k} - \frac{mF}{2} + F = 2$$

بضرب طرفي المعادلة بالمقدار $2k$ والتبسيط نحصل على:

$$F(2m + 2k - mk) = 4k \qquad (***)$$

الصيغة $(***)$ صيغة غنية وتحتوي على جميع المعلومات التي نحتاجها لتصنيف المجسمات الأفلاطونية، ويمكن إيجاد هذه المجسمات على النحو التالي:

(١) لا يمكن أن يكون $m \geq 4$ و $k \geq 4$ معًا، فلو كانت المتباينتان محققتين وكان $m \geq k$ فإن $mk \geq 4m$ وأن $mk \geq 4k$. بضرب كل من المتباينتين بالعدد $\frac{1}{2}$ والجمع نجد أن $mk \geq 2m + 2k$. إن هذا يجعل الطرف الأيسر من $(***)$ غير موجب وهذا مستحيل (لأن الطرف الأيمن موجب). ونحصل على تناقض مماثل إذا كان $k \geq 4$. إذن، $m < 4$ أو $k < 4$.

(٢) لا يمكن أن يكون $k > 5$ أو $m > 5$. إذا كان $k > 5$ فإننا نجد من الخطوة (١) أن $m \leq 3$ وبما أن $m \neq 1$ و $m \neq 2$ (لأن عدد الأضلاع التي تحد وجه المضلع يجب أن يكون أكبر من أو يساوي 3). إذن $m = 3$. بالتعويض في الصيغة $(***)$ نحصل على $F(2 \times 3 + 2k - 3k) = 4k$. أي $F \ 6 - k \ = 4k$. وبما أن $k > 5$ فإن الطرف الأيسر غير موجب وهذا أيضاً تناقض. وبأسلوب

مماثل يمكن إثبات استحالة أن يكون $m > 5$.

(٣) من الخطوتين (١) و (٢) وجدنا أن $m \leq 5$ و $k \leq 5$ ولا يمكن أن يكون كلاهما أكبر من أو يساوي 4 . وبملاحظة استحالة أن يكون $m = 1,2$ وكذلك $k = 1,2$ فنجد أن عدد الخيارات الممكنة هو خمسة خيارات هي:

$k = 3$ و $m = 3$

$k = 4$ و $m = 3$

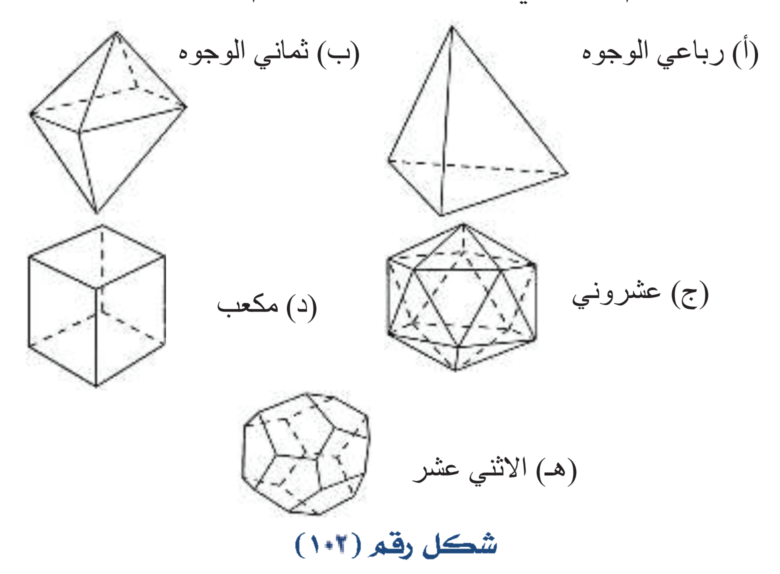
$k = 5$ و $m = 3$

$k = 3$ و $m = 4$

$k = 3$ و $m = 5$

(٤) ندرس كل من هذه الحالات الخمس ونجد المجسم الأفلاطوني المقابل لكل من هذه الحالات:

(أ) $m = 3$ و $k = 3$: بالتعويض في $(***)$ نجد أن $F = 4$. أي أن لكثير الوجوه 4 وجوه كل منها مثلث، وكل ثلاثة مثلثات تتلاقى عند كل رأس. وبهذا فالمجسم هو رباعي وجوه (انظر: الشكل رقم ١٠٢أ).



شكل رقم (١٠٢)

(ب) $m = 3$ و $k = 3$: بالتعويض في $(***)$ نجد أن $F = 8$. أي أن لكثير الوجوه 8 وجوه كل منها مثلث وكل أربعة مثلثات تتلاقى عند كل رأس. وبهذا فالمجسم هو ثماني وجوه (انظر: الشكل رقم ١٠٢ب).

(ج) $m = 3$ و $k = 5$: بالتعويض في $(***)$ نجد أن $F = 20$. أي أن لكثير الوجوه 20 وجهاً كل منها مثلث وكل خمسة مثلثات تتلاقى عند كل رأس. وبهذا فالمجسم هو عشروني (انظر: الشكل رقم ١٠٢جـ).

(د) $m = 4$ و $k = 3$: بالتعويض في $(***)$ نجد أن $F = 6$. أي أن لكثير الوجوه 6 وجوه كل منها مربع وأن كل أربعة مربعات تتلاقى عند كل رأس. وبهذا فالمجسم هو مكعب (انظر: الشكل رقم ١٠٢د).

(هـ) $m = 5$ و $k = 3$: بالتعويض في $(***)$ نجد أن $F = 12$ أي أن لكثير الوجوه 12 وجهًا كل منهما خماسي منتظم وكل ثلاث خماسيات تتلاقى عند كل رأس. هذا المجسم هو الاثنا عشر (انظر: الشكل رقم ١٠٢هـ). وبهذا نكون قد حصلنا على جميع المجسمات الأفلاطونية. □

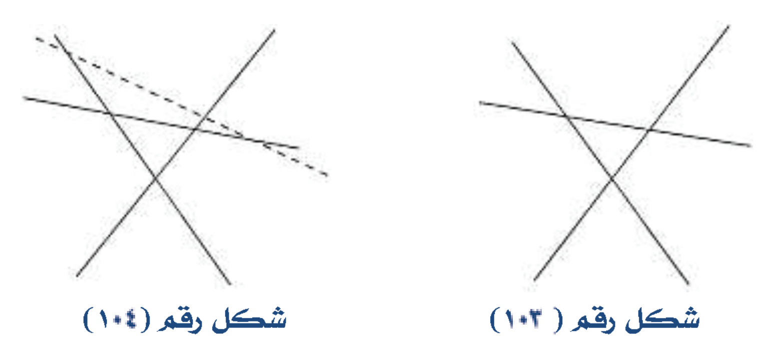
نقدم الآن حلاً للمسألة التي طرحناها في نهاية البند(٢,١).

مسألة (١٣,٤,٢)

لدينا خمسة مستويات في الفضاء ثلاثي البُعد في وضعها العام (انظر: البند (٢,١) لمعرفة ماذا نقصد بالوضع العام؟). كم عدد المناطق في الفضاء التي تنشأ عن هذه المستويات؟

الحل:

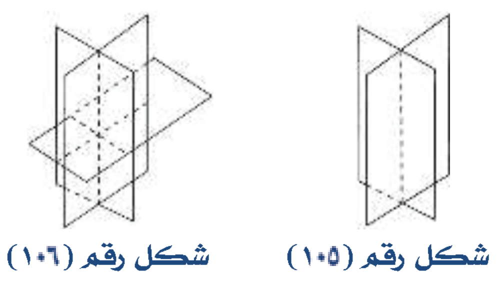
نستخدم شكل من أشكال الاستقراء. نبدأ بالحقيقة التي برهناها في نهاية البند (٢,١) وهي أن ثلاثة مستقيمات في وضعها العام تقسم المستوى إلى 7 مناطق (انظر: الشكل رقم ١٠٣).



شكل رقم (١٠٣) شكل رقم (١٠٤)

نفرض الآن أننا أضفنا مستقيماً رابعاً في الوضع العام (انظر: شكل رقم ١٠٤). يقطع هذا المستقيم كل من المستقيمات السابقة مرة واحدة فقط. وبهذا توجد ثلاث نقاط تقاطع على هذا المستقيم. تقسم النقاط الثلاث هذه المستقيم الرابع إلى أربع قطع مستقيمة. كل من هذه القطع تقسم إحدى المناطق السابقة إلى منطقتين. وبهذا نحصل على أربع مناطق إضافية بإضافة المستقيم الرابع. أي أن عدد المناطق يصبح $7 + 4 = 11$. وهذا هو عدد المناطق التي تنشأ عن تقسيم المستوى باستخدام أربعة مستقيمات في الوضع العام.

الآن، نستخدم ما تعلمناه في الفقرة السابقة لحل المسألة المطروحة. من الواضح أن مستويين في الوضع العام (غير متوازيين) يقسمان الفضاء إلى أربع مناطق (انظر : الشكل رقم ١٠٥).



شكل رقم (١٠٥) شكل رقم (١٠٦)

نضيف الآن مستوى ثالث. هذا المستوى يقطع كل من المستويين السابقين في مستقيم. وينتج عن ذلك مستقيمان في وضعهما العام في المستوى الثالث المضاف. وكما رأينا في البند (٢،١) فإن هذين المستقيمين يقسمان المستوى إلى أربع مناطق. كل من هذه

المناطق المستوية الأربع تقسم إحدى المناطق الفضائية الأربع التي حصلنا عليها من المستويين الأولين. وبهذا نحصل على 4 مناطق جديدة. ويكون عدد المناطق التي تنشأ عن تقسيم ثلاثة مستويات للفضاء هو $8 = 4 + 4$. (انظر: إلى الشكل رقم ١٠٦ للتحقق من ذلك). وهذا هو الشكل الأخير الذي نرسمه لأنه بعد ذلك يكون من الصعب رسم شكل معقول، لذا سنعتمد على التبرير النظري.

وجدنا لحد الآن أن ثلاثة مستويات في وضعها العام تقسم الفضاء إلى 8 مناطق فضائية. أضف الآن مستوى رابعاً. يقطع هذا المستوى كل من المستويات الثلاثة السابقة في مستقيم. من ذلك نحصل على ثلاثة مستقيمات في الوضع العام في المستوى المضاف. هذه المستقيمات الثلاثة تقسم المستوى الرابع المضاف إلى 7 مناطق مستوية. كل من هذه المناطق المستوية تقسم أحد المستويات الفضائية التي لدينا إلى منطقتين. ولهذا نحصل على 7 مناطق فضائية جديدة بإضافة مستوى رابع. ويكون العدد الكلي للمناطق الفضائية هو $15 = 7 + 8$.

الخطوة التالية والتي يصعب تخيلها ولكن من السهل تبريرها. أضف الآن مستوى خامساً بوضعه العام. يقطع هذا المستوى كل من المستويات الأربعة السابقة في مستقيم. وبهذا نحصل على 4 مستقيمات بالوضع العام في المستوى الجديد. هذه المستقيمات ستقسم المستوى الجديد إلى 11 منطقة مستوية. (كما بينا في الفقرة الأولى من الحلّ). كل من هذه المناطق المستوية ستقسم إحدى المناطق الفضائية الموجودة إلى منطقتين وبهذا نحصل على 11 منطقة فضائية جديدة. ونخلص إلى أن العدد الكلي للمناطق الفضائية التي نحصل عليها من تقسيم 5 مستويات في وضعها العام الفضاء هو $26 = 11 + 15$. □

مسألة تحدي (١٤،٤،٢)

جد صيغة لعدد المناطق التي تنشأ عن تقسيم k من المستويات في وضعها العام للفضاء ثلاثي البُعد.

مسألة تحدي (١٥,٤,٢)

[تستطيع حلّ هذه المسألة إذا كانت لديك خبرة في الفضاءات ذات الأبعاد التي لا تقل عن 4 . يمكنك الاستعانة بمنْ يرشدك على طريقة التفكير لحلِّ هذه المسألة]. جد صيغة لعدد المناطق التي تنشأ عن تقسيم k من الفضاءات الجزئية بُعد كل منها $n-1$ في وضعها العام الفضاء ذو بعد n .

تمارين على الفصل الثاني

(١) أثبت آبل و هاكن (Appel and Haken) أنه يمكن تلوين أي رسم مرسوم على كرة بأربعة ألوان على الأكثر. المقصود هنا هو تلوين رؤوس الرسم بحيث يأخذ أي رأسين متجاورين (بينهما ضلع) لونين مختلفين. العدد 4 يسمى العدد اللوني (chromatic number) للكرة لأن:

(i) لا يوجد رسم يحتاج أكثر من أربعة ألوان.

(ii) يوجد رسم يحتاج إلى اربعة ألوان بالضبط.

(أ) أعط مثالاً لرسم على الكرة يحتاج في الحقيقة إلى أربعة ألوان وفسر لماذا تعد الألوان الأربعة ضرورية.

(ب) أعط مثالاً لرسم على الطارة يحتاج 7 ألوان.

(ج) أعط تخميناً للعدد اللوني لطارة تحتوي ثقبين.

(٢) أفرض أننا قسمنا المستوى إلى مناطق برسم عدد منته من الدوائر مع إمكانية تقاطع أو عدم تقاطع بعضها وإمكانية اختلاف أنصاف أقطارها ومراكزها. كم عدد الألوان اللازمة لتلوين هذه المناطق بحيث يتم تلوين أي منطقتين متجاورتين بلونين مختلفين؟ [تكون المنطقتان متجاورتين إذا اشتركتا بجزء من ضلع وليس فقط رأس].

(٣) رسمنا دائرة نصف قطرها 1 داخل مثلث متساوي الأضلاع. بعد ذلك، عند كل رأس من رؤوس المثلث، رسمنا ثلاث دوائر بين الدائرة الأولى وضلعي المثلث المشتركين في ذلك الرأس. إذا أعدنا الخطوة السابقة طالما استطعنا ذلك فما مجموع أنصاف أقطار جميع الدوائر التي نحصل عليها؟

(٤) لنفرض أن Q مجموعة نقاط مربع وحدة مغلق مع نقاطه الداخلية (طول

ضلعه يساوي 1). اختار 5 نقاط عشوائيًا في المجموعة Q. أثبت وجود نقطتين منها المسافة بينهما لا تزيد على $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(٥) ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا. كم عدد المثلثات غير المتطابقة التي أطوال أضلاعها أعداد صحيحة بحيث يكون طول الضلع الأكبر يساوي n؟

(٦) مثلث قائم محيطه 60 بوصة. طول ارتفاعه العمودي على الوتر يساوي 12 بوصة. ما أطوال أضلاع المثلث؟

(٧) لدينا مائدة مستطيلة كبيرة. يمكن تغطية المائدة بقطع نقود ذوات الفئة الواحدة (لتكن ربع ريال) بإحدى الطريقتين التاليتين:

(أ) ضع قطع النقود على شكل صفوف وأعمدة بحيث تتجاور كل قطع نقود مع أربع قطع نقود أخرى، واحدة على يسارها، واحدة على يمينها، واحدة أعلاها، واحدة أسفلها. المستقيمات المرسومة من مركز كل من هذه القطع إلى مراكز القطع المتجاورة لها بحيث يكون قياس كل من الزوايا بين كل زوج من هذه المستقيمات يساوي 90°. تسمى هذه التغطية، التغطية المستقيمة (rectilinear packing).

(ب) الطريقة الثانية للتغطية تتم بحيث يكون لكل قطعة نقود ست قطع نقود مجاورة لها. المستقيمات المرسومة من مركز أحدها إلى مراكز القطع المجاورة لها تشكل زوايا مقياسها 60° فيما بينها. تسمى هذه التغطية، التغطية السداسية (hexagonal packing).

قارن بين هاتين الطريقتين لتغطية المائدة. أي منها أكثر فاعلية (أي تكون المساحة غير المغطاة أصغر)؟ احسب بالتقريب المساحة التي يتم تغطيتها لكل من الطريقتين.

(٨) يمكن تغطية المستوى بسداسيات منتظمة طول ضلع كل منها 1 بوصة.

"التغطية" هنا تعني تغطية المستوى بهذه السداسيات المتجاورة وغير المتقاطعة بدون ترك فراغات في المستوى. ارسم شكلاً يبين إمكانية هذه التغطية. بين استحالة تغطية المستوى بخماسيات منتظمة طول ضلع كل منها يساوي 1 بوصة.

(٩) ليكن T مثلثاً معطى. باستخدام مفهوم التغطية المقدم في التمرين رقم (٨)، هل يمكن تغطية المستوى بمثلثات جميعها متطابقة وتطابق T ؟

(١٠) ليكن R مستطيلاً أطوال أضلاعه أعداد كسرية. استخدم مفهوم التغطية المقدم في التمرين (٨) لإثبات إمكانية تغطية المستوى بمستطيلات مطابقة للمستطيل R بعدد غير منته من الطرق المختلفة.

(١١) لتكن U مجموعة محدودة ومغلقة في المستوى. قطر U هو أكبر مسافة بين أي نقطتين في U. بين فيما إذا كانت العبارة التالية صائبة أم خاطئة:
إذا كان قطر U يساوي d فإنه يوجد قرص مغلق قطره d يحتوي U.

(١٢) لنفرض أن α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha < \beta$. ولتكن $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \le x \le \beta\}$. تسمى المجموعة S، شريحة عرضها $\beta - \alpha$. أي مجموعة نحصل عليها من دوران S تسمى أيضاً شريحة. نقول إن عرض المجموعة المغلقة X يساوي d إذا كانت X محتواه في شريحة عرضها d. ما العلاقة بين المفهومين: عرض يساوي d وقطر يساوي d ؟ هل قطر مجموعة عرضها d لا يزيد على d ؟ هل العكس صحيح ؟ اعط أمثلة.

(١٣) لتكن كل من X و Y مجموعة في المستوى. يعرف المجموع $X+Y$ على النحو التالي: $X+Y = \{x+y : x \in X, y \in Y\}$. إذا كانت كل من X و Y مجموعة محدبة فهل $X+Y$ مجموعة محدبة ؟ إذا كان قطر كل من X و Y لا يزيد على d فما الذي يمكن قوله عن قطر $X+Y$ ؟ إذا كان عرض كل من X و Y لا يزيد على d فما الذي يمكن قوله عن عرض

$X + Y$ ؟ [انظر التمرينين ١١ و ١٢].

(١٤) بالرجوع إلى التمرين رقم (١٣)، ما العلاقة بين مساحة $X + Y$ ومساحة كل من X و Y.

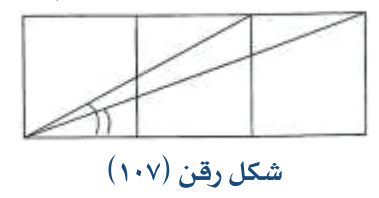
(١٥) لتكن S مجموعة محدودة ومغلقة في المستوى. ولتكن $2S = \{(2x, 2y) : (x, y) \in S\}$. ما العلاقة بين مساحة S ومساحة $2S$ ؟ هل الوضع الأصلي للمجموعة S يؤثر في الإجابة؟

(١٦) لتكن S مجموعة محدودة ومغلقة في المستوى ولا تحتوي نقطة الأصل. ولتكن $S' = \left\{ \frac{s}{\|s\|^2} : s \in S \right\}$. ما العلاقة بين مساحة S ومساحة S' ؟

(١٧) حل التمرين رقم (١٣) للمجموعات الجزئية من مستقيم.

(١٨) خذ إبرة خياطة طولها بوصة واحدة. اغمرها في حبر سائل. ضعها على قطعة من الورق. حركها في مستوى قطعة الورق حتى يتم استبدال موقعي طرفيها. كيف يمكن إنجاز ذلك بحيث تكون مساحة الحبر الناتج عن هذه الحركة أصغر ما يمكن؟ هذه هي الصيغة التقليدية لمسألة الإبرة لكاكيا (Kakeya). الإجابة غير المتوقعة هي: إذا كان $\varepsilon > 0$ فتوجد طريقة لتحريك الإبرة بزاوية 180° بحيث تكون مساحة الحبر الناتج عن هذه الحركة أصغر من ε. قم بتجريب ذلك ولاحظ مساحة الحبر الناتجة. انظر: [CUN].

(١٩) بالرجوع إلى الزاويتين المرسومتين في الشكل رقم (١٠٧)



شكل رقن (١٠٧)

أثبت أن قياس مجموع هاتين الزاويتين يساوي 45° [إرشاد: يمكن حل هذا التمرين باستخدام حساب المثلثات أو باستخدام الانعكاس].

(٢٠) ليكن $ABCD$ شكل رباعي. أثبت أن قطريه متعامدان إذا وفقط إذا كان:

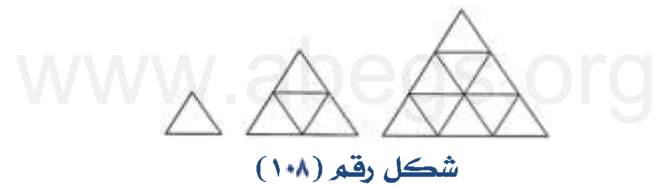
$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |CB|^2$$

(٢١) إذا رسمنا مثلثا T داخل مضلع P فبين أن محيط T لا يمكن أن يزيد على محيط P.

(٢٢) أطوال أضلاع مثلث هي متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة: $n,(n+1),(n+2)$. مساحة المثلث تساوي 6. جد أطوال جميع أضلاع المثلث وقياس جميع زواياه.

(٢٣) ليكن $\triangle ABC$ مثلثاً قائماً. أثبت وجود نقطة N داخل المثلث حيث $NAB = NCA = NBC$.

(٢٤) الشكل رقم (١٠٨) يبين مثلثات قسمت إلى مثلثات أصغر.



شكل رقم (١٠٨)

لاحظ أن الشكل الأول يحتوي على مثلث صغير واحد. الشكل الثاني يتكون من صفين من المثلثات الصغيرة وعدد هذه المثلثات في الصفين يساوي $4 = 2^2$. الشكل الثالث يتكون من ثلاثة صفوف من المثلثات الصغيرة تحتوي على $9 = 3^2$ مثلث صغير. وبالاستمرار على هذا المنوال نجد أن الصفوف n الأولى تحتوي على n^2 من المثلثات الصغيرة. وضح السبب وراء هذا الاستنتاج.

(٢٥) ليكن T مثلثاً متساوي الأضلاع و P نقطة داخل المثلث T. لتكن a، b، c هي المسافات بين P وأضلاع المثلث الثلاثة. إذا كان h هو ارتفاع المثلث فأثبت أن $h = a + b + c$.

(٢٦) ليكن $T_{x,y}$ مثلثاً أطوال أضلاعه x، y، 1 حيث $x \leq y \leq 1$. بعمل تقابل بين

هذا المثلث والنقطة (x, y) في المستوى:

(أ) جد جميع النقاط (x, y) التي تقابل المثلثات.

(ب) جد جميع النقاط (x, y) التي تقابل مثلثات متساوية الساقين.

(ج) جد جميع النقاط (x, y) التي تقابل مثلثات متساوية الأضلاع.

(د) جد جميع النقاط (x, y) التي تقابل مثلثات قائمة.

(٢٧) مثلث قائم أطوال أضلاعه ℓ، m، 10 حيث الضلع الذي طوله 10 هو أحد الساقين و m و ℓ عددان صحيحان. جد كل من ℓ و m.

(٢٨) إذا تساوى متوسطان في مثلث فأثبت أن المثلث متساوي الساقين [إرشاد: أفرض أن المتوسطين المتساويين هما AP و BQ وأن X نقطة تقاطعهما. عندئذ، $AX = \frac{2}{3}AP$ و $BX = \frac{2}{3}BQ$. أو استخدم الهندسة الإحداثية].

(٢٩) إذا كان لشكل في المستوى محوري تماثل فقط فأثبت أن هذين المحورين متعامدان.

(٣٠) أثبت مبرهنة سيلفستر (Sylvester`s theorem): لدينا عدد منته من النقاط في المستوى. إذا مرّ أي مستقيم مرسوم بين أي نقطتين منها في نقطة ثالثة فإن جميع النقاط على استقامة واحدة.

(٣١) ثقبنا حفرة خلال مركز مجسم كروي. طول الحفرة (من حافة إلى الحافة المقابلة) يساوي ست بوصات. ما حجم الجسم الكروي المتبقي؟

[إرشاد: لاحظ أن الإجابة المتوقعة لا تعتمد على نصف قطر الحفرة ولا على نصف قطر الشكل الكروي].

(٣٢) لدينا مربع طول ضلعه 1. ما أكبر مساحة لمثلث يمكن رسمه داخل المربع؟ ماذا لو استبدلنا "مربع طول ضلعه 1" بـ "مستطيل مساحته 1"؟ ماذا لو استبدلنا "مربع طول ضلعه 1" بـ "دائرة قطرها 1"؟

(٣٣) لتكن P نقطة تقع في الربع الأول. استخدم هذه النقطة لإيجاد مثلث في الربع الأول برسم مستقيم يمرّ بالنقطة P ويقطع محور x الموجب ومحور y الموجب. ما المستقيم الذي يعتمد على إحداثيات P الذي ينتج عنه مثلث مساحته أصغر ما يمكن؟

(٣٤) أثبت وجود عدد ثابت $C > 0$ يحقق الخاصية: إذا كانت $\{a_j\}_{j=1}^{m}$ متتالية منتهية من الأعداد المركبة فإنه توجد متتالية جزئية $a_{j_1},....a_{j_k}$ بحيث يكون:

$$\left|a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_k}\right| \geq C\left[\left|a_1\right| + \left|a_2\right| + \cdots + \left|a_m\right|\right]$$

(٣٥) ليكن S سطحًا مغلقًا في الفضاء ثلاثي البُعد [مثل، كرة أو طارة أو طارة ذات ثقبين وهكذا]. نقول أن طبقة (genus) S هي g إذا احتوت S على عدد من الأنفاق يساوي g : طبقة الكرة تساوي 0، طبقة الطارة القياسية تساوي 1، طبقة الطارة ذات ثقبين تساوي 2 وهكذا. اقترح هيود (Heawood) صيغة ثم برهانها لاحقًا من قبل رينجل ويانغز (Ringel and Youngs)، انظر: [RIN]، عندما يكون $g > 0$ تنص على:

العدد اللوني لسطح مغلق S له طبقة g هو:

$$\chi(S) = \left[\frac{1}{2}\ 7 + \sqrt{1 + 48g}\ \right]$$

حيث [ ] هي دالة "أكبر عدد صحيح". أيضًا، "العدد اللوني" لسطح هو أصغر عدد من الألوان اللازمة لتلوين أي خارطة على السطح. لاحظ أنه للطارة لدينا $g = 1$ وبهذا نجد أن $\chi = 7$. ما العدد اللوني لطارة ذات ثقبين؟ ذات ثلاث ثقوب؟ هل تستطيع إيجاد أمثلة لخرائط للتحقق من صواب هذه الإجابات؟ [إرشاد: يقترح التمرين رقم (١) كيفية الحصول عل أمثلة].

(٣٦) لنفرض أن $a_1, a_2, \ldots$ عدد غير منته من النقاط المختلفة في المستوى. ولنفرض أن المسافة بين أي نقطتين منها هي عدد صحيح (المسافات بين الأزواج المختلفة

هي أعداد صحيحة مختلفة). أثبت أن جميع النقاط a_j على استقامة واحدة.

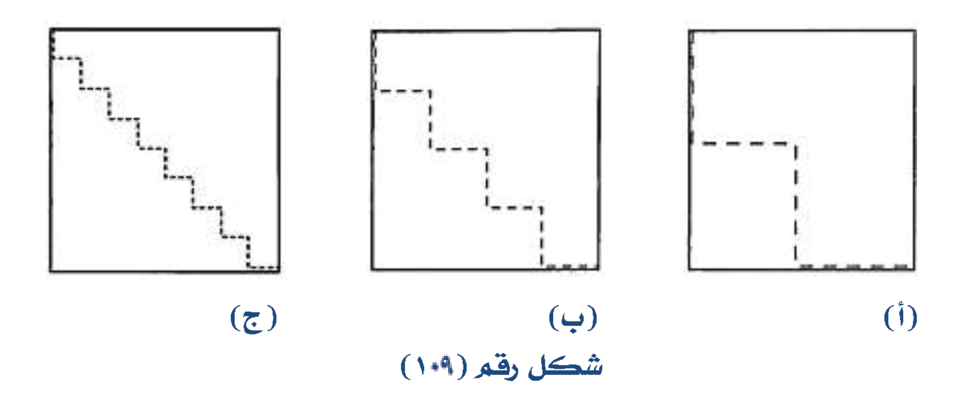
(٣٧) ليكن Q شكلاً رباعياً محدباً في المستوى. تخيل الآن أننا وضعنا المستوى في الفضاء. بين أن Q هو "صورة منظورة" لمربع في الفضاء [نعني هنا بصورة منظورة: لتكن Z نقطة ثابتة في الفضاء، وهذه النقطة هي بؤرة المنظور. لتكن S مجموعة ثابتة. ثبت الآن مستوى بحيث تقع S بين Z والمستوى. الآن، تخيل وجود مراقب عند Z يركز على كل نقطة من نقاط S ويسقطها إلى المستوى على النحو التالي: إذا كان $s \in S$ فإنه يقوم برسم المستقيم الوحيد الذي تحدده s و Z. نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوى المعطى هي الصورة المنظورة للنقطة s. صورة المجموعة S هي اتحاد جميع النقاط المسقطة].

(٣٨) الهرم هو كثير وجوه عدد وجوهه يساوي 5. قاعدة الهرم مربع. جوانبه الأربعة مثلثات تتلاقى عند رأس علوي. حجم الهرم هو حاصل ضرب $\frac{1}{3}$ في مساحة القاعدة في الارتفاع. دون استخدام التفاضل والتكامل ولكن باستخدام التماثل لماذا هذه الصيغة لحجم الهرم صحيحة.

(٣٩) لدينا كعكة دونات في الفضاء (طارة مع نقاط الداخل). اقطع ثلاث شرائح مستوية. ما أكبر عدد من القطع التي تحصل عليها ؟

(٤٠) لدينا مكعب خشبي طول ضلعه 4 بوصات. المطلوب هو حفر ثقب قطره بوصة واحدة على القطر الرئيس (من الركن العلوي الخلفي الأيسر إلى الركن الأمامي السفلي الأيمن). ما حجم الجسم المتبقي؟ [إرشاد: يمكن أن تفشل باستخدام الرياضيات لحل هذه المسألة. في حالة فشل محاولاتك، حاول من ابتكار طريقة أخرى لإيجاد الحجم. كن عمليًّا].

(٤١) لديك مربع طول ضلعه 1. نقدم الآن طريقة لحساب طول قطره باستخدام متتالية من التقريبات. التقريب الأول مبين في الشكل رقم (١٠٩أ) والتقريب الثاني مبين في الشكل رقم (١٠٩ب) والتقريب الثالث مبين في الشكل (١٠٩جـ).



شكل رقم (١٠٩)

اتبع هذه النمط من التقريبات باستخدام قطع من المنحنيات الخطية التي تقترب أكثر فأكثر من القطر. ما طول كل من هذه التقريبات؟ ماذا يقترح هذا التمرين عن طول القطر ؟ ما طول القطر باستخدام مبرهنة فيثاغورس ؟ ما التبرير لما يظهر على أنه تناقض هنا ؟

(٤٢) قلِّد التمرين رقم (٤١) للحصول على إجابة خاطئة لمحيط دائرة نصف قطرها 1.

الفصل الثالث

مسائل في العد
Problems Involving Counting

(٣,١) مسائل سهلة في الاحتمال
Elementary Problems in Probability

تعلمنا سابقاً بعض أساليب العد، ومن المؤكد أننا سنحتاج إليها في هذا الفصل. ولحساب الاحتمال فإننا نحتاج دائماً لمعرفة فضاء العينة (sample space). موضوع الاحتمالات غني بالألغاز والمحيرات المرتبطة بعد فهمنا لفضاء العينة أو فضاء المخرجات. نركز في هذا البند على دراسة ذلك.

مسألة (١,١,٣)

كتبنا الحروف A, B, C, D, E, F, G, H على ثماني قطع في الورق ثم وضعناها في صندوق. سحبنا الأوراق الثماني من الصندوق واحدة بعد الأخرى. ما احتمال أن تكون الأربع ورقات الأولى هي A, C, E, H (بأي ترتيب) ؟

الحل:

هذه المسألة أسهل مما نعتقد لأنه بعد اختيار الأربع ورقات الأولى لا نحتاج إلى عمل أي شيء آخر حيث يمكننا حرق الأوراق الأخرى أو شرب القهوة أو نتعلم قيادة الحافلات. كما أن المسألة لا تحتاج إلى ترتيب الأوراق المسحوبة. ولهذا فإن ما نقوم به هو اختيار أربعة عناصر عشوائياً من مجموعة عدد عناصرها 8 ومعرفة فيما إذا كنا قد اخترنا 4 عناصر معينة بأي ترتيب. عدد طرق اختيار 4 عناصر من مجموعة عدد عناصرها 8 هو:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70.$$

من بين المجموعات الجزئية المختلفة، توجد مجموعة واحدة A,C,E,H .

إذن، احتمال أن تكون الأوراق الأربع الأولى هي الأوراق المطلوبة يساوي $\frac{1}{70}$. □

مسألة (٣.١.٢)

كتبت 37 رسالة وكتبت عناوين الأشخاص المراد إرسال الرسائل لهم على 37 مظروفًا. بدون النظر إلى الرسائل، بدأت بوضع الرسائل عشوائيًّا في المظاريف. ما احتمال أن يكون واحدًا فقط من هذه المظاريف يحتوي الرسالة الخطأ؟

الحل:

لنفرض أننا رقمنا المظاريف من 1 إلى 37 وكذلك الرسائل من 1 إلى 37 .
إذا وضعت الرسائل التي تحمل الأرقام 1 إلى 36 في المظاريف الصحيحة 1 إلى 36 فإنه يبقى لديك الرسالة 37 والمظروف 37 . وبهذا فإنك ستضع الرسالة 37 في المظروف الصحيح 37 .

من الواضح أن طريقة الترقيم هذه ليس لها خصوصية معينة لكنها وضحت لنا الملاحظة البسيطة التالية: استحالة أن تضع رسالة واحدة فقط في المظروف الخطأ. فإذا وضعت إحدى الرسائل في المظروف الخطأ فإنه لا بد من أن توضع على الأقل رسالتان في مظروفين خطأ. إذن، إجابة المسألة هي أن الاحتمال المطلوب يساوي 0 . □

وضحت لنا المسألة السابقة حقيقة بسيطة ولكنها على في غاية الأهمية وهي: لا يمكننا الحكم دائمًا على المسألة من ظاهرها، فمن الممكن أن يكون نص المسألة بسيطًا ومنمقًا، ولكنها ليست متسقة أو أنها غير قابلة للحل في المطلق. النسخة المعدلة التالية للمسألة السابقة أكثر أهمية:

مسألة (٣.١.٣)

كتبت 37 رسالة وكتبت عناوين الأشخاص المراد إرسال الرسائل لهم على 37 مظروفًا، من دون النظر إلى الرسائل، بدأت بوضع الرسائل في المظاريف. ما احتمال أن تكون

قد وضعت رسالتين فقط في المظروفين الخطأ وباقي الرسائل في المظاريف الصحيحة؟

الحل:

إذا وضعت رسالتين فقط في مظروفين خطأ فإنهما قد تبادلتا المظروفين. على سبيل المثال، الرسالة 5 وضعت في المظروف 19 والرسالة 19 وضعت في المظروف 5 . لذا فإن عدد الطرق المختلفة لوضع رسالتين فقط في مظروفين خطأ هو عدد طرق اختيار رسالتين من بين 37 رسالة [جميع الرسائل الـ 35 الأخرى توضع في المظاريف الصحيحة ولا يوجد اختيار هنا]. هذا العدد هو:

$$N = \binom{37}{2} = \frac{37!}{2! \times 35!} = \frac{37 \times 36}{2 \times 1} = 666$$

الآن، تخيل أن المظاريف بترتيبها الصحيح (1 إلى 37) موضوعة في صف واحد. عندئذ، التوزيع العشوائي للرسائل على المظاريف يقابل الترتيب العشوائي للرسائل. هذا العدد هو عدد التبديلات المختلفة لمجموعة مكونة من 37 عنصرًا وهو 37! (عدد كبير جدًا). إذن، احتمال وضع رسالتين فقط في مظروفين خطأ هو:

$$. P = \frac{666}{37!} \approx 4.86 \times 10^{-41} \qquad \square$$

سنعالج في هذا البند بعض المسائل الصعبة التي تتعلق بوضع رسائل في مظاريف.

مسألة (٣.١.٤)

قررت إحدى السيدات زيارة بيت صديقتها المتزوجة التي لم تقم بزيارتها منذ عدة سنوات. تعلم السيدة أن لدى صديقتها طفلين مختلفين في العمر، لكنها لا تعلم فيما إذا كان الطفلان ولدين أم بنتين أم ولد وبنت. عند وصولها للبيت فتح لها الباب ولدًا. ما احتمال أن يكون الطفل الثاني ولدًا؟

الحل:

أفضل طريقة لحل هذه المسألة هو إيجاد فضاء العينة. أحد الحلول الخاطئة

للمسألة هو القول :"يوجد طفل آخر". هذا الطفل إما أن يكون ولدًا أو بنتًا. لذا فإن احتمال أن يكون ولدًا هو $\frac{1}{2}$.

ما الخطأ في هذا الحل؟ الخطأ هو علمنا مقدمًا وجود طفلين. لذا فإن فضاء العينة يتكون من جميع أزواج الأطفال الممكنة. فإذا وجدنا جميع هذه الأزواج بالترتيب (الأصغر, الأكبر) نجد أنها:

$$(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)$$

وعددها 4. لا نعلم إن كان الولد الذي فتح الباب هو الأصغر أم الأكبر. لذا ليس لدينا أدنى فكرة إن كان هذا الولد هو الإحداثي الأول أم الإحداثي الثاني في الزوج المرتب. لذا فإن فضاء العينة الذي يصف أطفال العائلة هو:

$$(B,B),(\mathrm{B},\mathrm{G}),(\mathrm{G},\mathrm{B})$$

اثنان من هذه الأزواج يبين أن الطفل الآخر هو بنت وواحد يبين أن الطفل الآخر هو ولد. إذن، احتمال أن يكون الطفل الثاني ولدًا هو $\frac{1}{3}$. □

مسألة تحدي (٥,١,٣)

لنفرض أن محاولة حلنا للمسألة السابقة كانت على النحو التالي: نجد جميع الأزواج الممكنة للطفلين (الآخر وفاتح الباب). الإحداثي الأول هو للطفل الذي فتح الباب والإحداثي الثاني للطفل الآخر. عندئذ، فضاء العينة هو:

$$(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)$$

وبما أننا على علم مسبق بأن من فتح الباب هو ولد فإننا نقوم بتجاهل الزوجين الآخرين ويبقى لدينا الخيارين $(B,B),(B,G)$. وبهذا نتوصل إلى أن احتمال أن يكون الطفل الآخر ولدًا هو $\frac{1}{2}$. ما الخطأ في الحل؟ أجب عن هذا السؤال قبل الاستمرار في القراءة.

مسألة تحدي (٣،١،٦)

لزيادة الحيرة لديك نقوم بحل المسألة على النحو التالي: جد جميع الأزواج الممكنة للطفلين (الآخر، فاتح الباب). الإحداثي الأول هو الطفل الذي فتح الباب والإحداثي الثاني هو للطفل الآخر. عندئذ، فضاء العينة هو:

$$(B_1, B_2), (B_2, B_1), (B, G), (G, B), (G_1, G_2), (G_2, G_1)$$

التغيير الذي قمنا به هو: إذا كان الطفلان ولدان فإن أي منهما يكون قد فتح الباب. لذا يجب التفريق بين هذين الخيارين. وبالمثل، إذا كان الطفلان بنتين. وكما هو الحال سابقًا، فإننا نعلم أن من فتح الباب هو ولد. وبهذا نحذف الخيارات الثلاث الأخيرة ويتبقى لدينا:

$$(B_1, B_2), (B_2, B_1), (B, G)$$

ومن ذلك نستنتج أن احتمال أن يكون الطفل الآخر ولدًا هو $\frac{2}{3}$. ما الخطأ في هذا الحل؟ أجب عن هذا السؤال قبل الاستمرار في القراءة.

إذا راودك شك في مخرجات مسألة "فتح الباب" فإننا ندعوك للقيام بتجربة. استبدل "ولد" و"بنت" بـ"صورة" و "كتابة" الآن، الق قطعة نقود مرتين وسجل نتيجة الرميتين بالترتيب. ثم الق قطعة النقود مرتين وسجل الرميتين بالترتيب. كرر التجربة 50 مرة لتحصل على بيانات تجريبية. تمثل هذه التجربة 50 عائلة لدى كل منها طفلان حيث توجد صورتان تقابلان ولدين وكتابتان تقابلان بنتين وهكذا.

الآن، نقوم بملاحظة مخرجات التجربة من دون التفكير في تحليلها للإجابة عن السؤال "إذا علمت أن أحد الإحداثيين صورة فما احتمال أن يكون الإحداثي الآخر صورة ؟". كتوضيح قام المؤلف بالتجربة 50 مرة وسجل نتائج التجربة في الجدول التالي:

T	H		T	H		H	T		H	H		T	H
H	H		T	H		H	T		T	H		T	T
T	H		H	T		H	H		H	H		T	T
H	T		T	H		H	T		H	H		H	H
H	H		H	T		H	H		T	T		H	H
H	T		T	H		H	T		T	H		T	T
H	H		H	H		H	T		H	H		H	T
H	T		T	H		T	H		T	T		H	T
H	T		T	H		H	H		T	T		H	H
H	T		H	H		H	T		H	T		T	T

لاحظ وجود 43 زوجًا أحد إحداثياتها هو صورة. 15 زوجًا منها الإحداثي الآخر لها هو صورة. وبحساب احتمال أن تكون مخرجات الرميتين صورة نجد أن هذا الاحتمال هو $\frac{15}{43} = 0.3488$ *. وهذا قريب جدًا من $\frac{1}{3}$. وهذه هي الإجابة التي حصلنا عليها من الحل الصحيح للمسألة.

نقوم الآن بتغيير بعض مفردات المسألة الأولى لنرى ماذا يحصل.

مسألة (٣,١,٧)

قررت إحدى السيدات زيارة بيت صديقتها المتزوجة التي لم تقم بزيارتها منذ عدة سنوات. تعلم السيدة أن لدى صديقتها طفلين مختلفين في العمر، لكنها لا تعلم فيما إذا كان هذان الطفلان ولدين أم بنتين أم ولد وبنت. عند وصولها للبيت فتح لها الباب ولدًا وصرح "أنا الطفل الكبير في العائلة. والطفل الآخر نائم في الغرفة". ما احتمال أن يكون الطفل الآخر ولدًا؟

* المترجمان: أجرى المترجمان التجربة 100 مرة ولاحظا وجود 81 زوجًا أحد إحداثياتها صورة، 28 زوجًا منها الإحداثي الآخر لها هو أيضًا صورة. وبهذا يكون الاحتمال هو $0.3456 \approx \frac{28}{81}$ وهذا أيضًا قريب جدًا من $\frac{1}{3}$.

الحل:

هذه مسألة مختلفة! تذكر أن فضاء العينة للأطفال (صغير، كبير) هو:

$$(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)$$

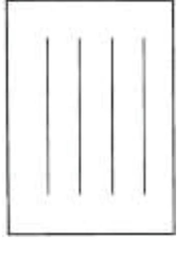
من بين هذه المخرجات التي يكون فيها الإحداثي الأول هو الولد الأكبر هي $(B,B),(B,G)$. الطفل الأصغر في أحد هذين الزوجين هو ولد وبنت في الزوج الآخر. إذن، احتمال أن يكون الطفل النائم في الغرفة يساوي احتمال أن يكون بنتًا.

وبهذا فالإجابة هنا هي $\frac{1}{2}$. □

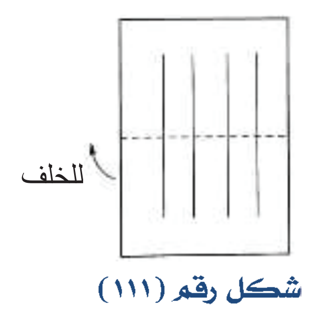
من المناسب هنا النظر أيضًا على مخرجات التجربة التي أجراها المؤلف. تذكر أن " صورة" تقابل "ولدًا" و "كتابة" تقابل "بنتًا". لاحظ وجود 31 زوجًا الإحداثي الأول فيها "صورة" (ولد). من بينها يوجد 15 زوجًا الإحداثي الثاني فيها صورة و 16 زوجًا الإحداثي الثاني كتابة. ولهذا فالتجربة تقترح أن احتمال أن يكون الطفل الثاني ولدًا هو 0.4839 وأن احتمال أن يكون الطفل الثاني بنتًا هو 0.5161 .

مسألة (٣.١.٨)

ارسم أربعة مستقيمات متوازية على قطعة من الورق كما هو مبين في الشكل رقم (١١٠). بعد ذلك قم بثني الورقة بمحاذاة الخط المنقط كما هو مبين في الشكل رقم (١١١).

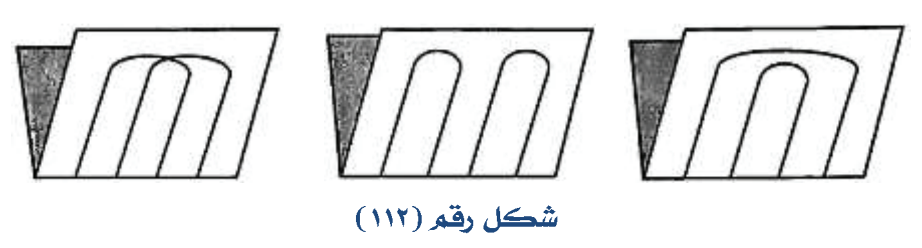


شكل رقم (١١٠)



شكل رقم (١١١)

أخبر أحد أصدقائك أنك ستستخدم نصف الورقة لوصل أزواج من المستقيمات. [توجد ثلاث طرق مختلفة لإنجاز ذلك والشكل رقم (١١٢) يبين الطرق الثلاثة]

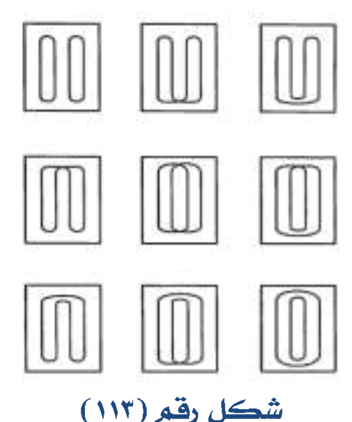


شكل رقم (١١٢)

لا تبين لصديقك كيفية إنجازك المهمة. بعد ذلك قم بوضع ما أنجزته مقلوبًا على مائدة. الآن، دع صديقك أن يقوم بالعمل نفسه الذي قمت به: أن يوصل النهايات الأربعة المتبقية من دون وصل للحصول على زوجين. اقترح على صديقك اللعبة التالية: عند إعادة فتح قطعة الورق، إذا كان الشكل الناتج عروة متصلة فإنك تكسب أما إذا كان الشكل الناتج عروتين منفصلتين فإن صديقك يكسب. هل يقبل صديقك اللعب؟

الحل:

هذه واحدة من المسائل التي إذا نظرنا إليها نظرة سطحية تظهر على أنها عادلة ولكن إذا تعمقنا فيها فهي ليست كذلك. انظر إلى الشكل رقم (١١٣).



شكل رقم (١١٣)

عند فرد الورقة تظهر جميع الأشياء المختلفة التي قمت بعملها (ما أنجزته يظهر دائمًا في الأعلى وما أنجزه صديقك يظهر دائمًا في الأسفل). لاحظ أن النتيجة تظهر عروة متصلة في 6 أشكال من 9 أشكال وعروتين منفصلتين في 3 أشكال من 9 أشكال. لهذا فإن احتمال أن تكسب هو $\frac{2}{3}$. ولهذا يكون من الغباء أن يقبل صديقك بقبول اقتراحك.

□

لاحظ (من باب الفضول) أنه ليس من الضروري أن تكون على علم باحتمال الربح، لأنه مهما كان خيارك للشكل الذي ستكون عليه الورقة فإنه سيكون احتمال الحصول على عروة مغلقة هو $\frac{2}{3}$ والشكل رقم (١١٣) يوضح هذه النقطة.

مسألة (٩،١،٣)

ناول صديقك مجموعة ورق لعب اعتيادية (عددها 52 ورقة) مقلوبة. اطلب منه أن يقسمها إلى ثلاث مجموعات ويضعها مقلوبة على مائدة. بعد ذلك تقول "أراهنك على* أن واحدة من الأوراق الثلاث العليا هي صورة" (صورة هنا تعني شاب أو ملكة أو ملك). هل يكون في صالح صديقك قبول الرهان؟

الحل:

إذا فكر صديقك في أن عدد أوراق الصور هو 12 من بين 52 ورقة. فعندئذ، يكون احتمال اختيار صورة هو $\frac{12}{52} \approx 0.2308$. وبهذا فالرهان لصالحه ويجب أن يقبل به.

لسوء الحظ، إذا كان صديقك يفكر فعلاً بهذه الطريقة فإنه لم يفهم معنى فضاء العينة ولا كيفية العد الصحيح. إليك الحل الصحيح للمسألة.

إذا وضعنا هذا الخداع جانبًا فإن ما تقوم بعمله أنت وصديقك هو اختيار ثلاثة أوراق عشوائيًا من بين مجموعة أوراق اللعب التي عددها 52 . والسؤال الآن هو:

* المترجمان: في هذا الكتاب سنجد بعض مسائل العد والاحتمال التي تتعرض للمراهنة، ومع أن ذلك يتنافى مع الشريعة الإسلامية، إلا أن لها تطبيقات رياضية مهمة في حل المسائل بعيدة كل البعد عن المراهنة.

ما احتمال أن تكون إحدى هذه الأوراق صورة؟ عدد الطرق المختلفة لاختيار ثلاث أوراق لعب هو $\binom{52}{3}$. من المناسب الآن (وهذا معمول به في العديد من مسائل الاحتمالات) حساب عدد طرق اختيار ثلاث أوراق ليس من بينها صورة. أي نقوم بحساب احتمال الفشل وليس النجاح. عدد أوراق اللعب التي لا تحتوي على صورة $40 = 52 - 12$. وعدد طرق اختيار ثلاث أوراق منها يساوي $\binom{40}{3}$. إذن، احتمال فشل الحصول على صورة هو:

$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{40!\,/\,(3!\times 37!)}{52!\,/\,(3!\times 49!)}$$

$$= \frac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44\times 43\times 42\times 41\times 40\times 39\times 38}{52\times 51\times 50\times 49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44\times 43\times 42\times 41}$$

$$= \frac{40\times 39\times 38}{52\times 51\times 50} \approx 0.44706$$

وبهذا فإن احتمال الحصول على صورة من بين الأوراق الثلاث المختارة هو $P = 1 - 0.44706 = 0.55294$. لاحظ أن هذا الاحتمال هو في الحقيقة أفضل حتى من احتمال اختيار ورقة من بين الأوراق الثلاث. إذن، الرهان يكون لصالحك وليس لصالح صديقك. أخذت هذه المسألة من [SIM1] ولكننا ننوه أن الحل في المصدر يحتوي على خطأ.

□

لاحظ أن فضاء العينة في المسألة السابقة ليس مجموعة أوراق اللعب التي عددها 52. لأنه لو كان ذلك لوجدنا أن احتمال الحصول على صورة هو $\frac{12}{52}$ كما ناقشناه

سابقًا. ولكن فضاء العينة هو مجوعة جميع ثلاثيات الأوراق والمطلوب هو إيجاد احتمال أن تكون ورقة من الثلاثي هي صورة. وهذا السبب وراء الاختلاف في الاحتمال.

(٢,٣) مسائل أكثر صعوبة في الاحتمال

More Sophisticated Problems In Probability

نقدم في هذا البند مسائل أكثر دقة على الاحتمالات والألعاب والعد. من المناسب هنا وفي مادة الكتاب اللاحقة، استخدام الرمز الرياضي للمجموع وهو:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

حيث الطرف الأيسر هو اختصار للمجموع المبين في الطرف الأيمن. على سبيل الأمثلة،

$$\sum_{j=1}^{5} (j^2 + 1) = (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) = 60$$

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\sum_{k=3}^{7} (k - 2) = (3 - 2) + (4 - 2) + (5 - 2) + (6 - 2) + (7 - 2) = 15$$

$$\sum_{l=-2}^{3} l^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 = 27$$

من خلال قراءة الكتاب ستصبح أكثر إلمامًا لرمز المجموع.

مسألة (١,٢,٣)

كيس يحتوي على عدد من البلّيات* الحمراء وعدد من البليات الزرقاء. يمكن أن يكون عدد البليات صفرًا أو موجبًا. سحبنا بلية عشوائيًّا من الكيس ووجدنا أنها حمراء. إذا سحبنا بلية ثانية فما احتمال أن تكون حمراء أيضًا؟

* المترجمان: البلِّية أو الكِلّة هي كرة رخامية أو زجاجية صغيرة يلعب بها الأطفال.

الحل:

المختلف في هذه المسألة هو عدم معرفتنا لعدد البليات الموجود في الكيس ولا عدد البليات من كل لون، لكننا نعلم وجود بلية حمراء واحدة على الأقل، ويمكن أن تكون جميع البليات الأخرى حمراء أو جميعها زرقاء. كيف يمكننا الاستفادة من هذه المعلومات (أو عدم وجودها)؟

لنفرض أن العدد الكلي للبليات الموجودة في الكيس هو N ولنفرض أن عدد البليات الحمراء هو K. نقوم بدراسة N من الحالات بالاعتماد على عدد البليات الحمراء. نكتب S_k ليعني أن عدد البليات الحمراء في الكيس يساوي k حيث $1 \leq k \leq N$. اعتبر وجود N كيس من البليات: الكيس B_1 يمثل S_1 (بلية حمراء واحدة) والكيس B_2 يمثل S_2 (بليتان حمراوان) وهكذا. عندئذ، عدد البليات الحمراء في جميع الأكياس هو:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (N-1) + \text{N} = \frac{N(N+1)}{2}$$

احتمال اختيار كل منها هو:

$$\frac{1}{N(N+1)/2} = \frac{2}{N(N+1)}$$

الآن، احتمال اختيار البلية الحمراء الأولى من الكيس B_1 هو:

$$\frac{1 \times 2}{N(N+1)}$$

لأن هذا الكيس يحتوي على بلية حمراء واحدة فقط. واحتمال اختيار البلية الحمراء الأولى من الكيس B_2 هو:

$$\frac{2 \times 2}{N(N+1)}$$

لأن B_2 يحتوي بليتين حمراوين. احتمال اختيار البلية الحمراء الأولى من

الكيس B_3 هو:

$$\frac{3\times 2}{N(N+1)}$$

وهكذا. إذن، احتمال اختيار البلية الحمراء الأولى من الكيس B_k هو:

$$\frac{k\times 2}{N(N+1)}.$$

بعد اختيار البلية الحمراء الأولى من الكيس B_k يبقى في الكيس عدد $(k-1)$ من البليات الحمراء و $(N-1)$ بلية. إذن، احتمال أن تكون البلية الثانية حمراء هو:

$$\frac{k-1}{N-1}.$$

احتمال وقوع الحدثين الأولى والثاني هو حاصل ضربهما:

$$P_k=\frac{k\times 2}{N(N+1)}\times\frac{k-1}{N-1}$$

وبما أن احتمال اختيار كل من الأكياس k متساوٍ (أي أن كل توزيعات البليات له فرصة الوقوع نفسها) فإن احتمال أن تكون البلية الثانية حمراء هو:

$$\begin{aligned}P&=\sum_{k=1}^{N}P_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{k\times 2}{N(N+1)}\times\frac{k-1}{N-1}\\&=\frac{2}{(N-1)N(N+1)}\sum_{k=1}^{N}k(k-1)\\&=\frac{2}{(N-1)N(N+1)}\left[\sum_{k=1}^{N}k^2-\sum_{k=1}^{N}k\right]\end{aligned}$$

ولكننا سبق وأن رأينا أن:

$$\sum_{k=1}^{N}k=\frac{N(N+1)}{2} \text{ وأن } \sum_{k=1}^{N}k^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

وبهذا نجد أن:

$$P=\frac{2}{(N-1)N(N+1)}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N(N+1)}{2}\right]=\frac{2}{3}$$

وبالتالي، نخلص إلى أن احتمال أن تكون البلية الثانية حمراء هو $\frac{2}{3}$. □

على الرغم من دقة الإجابة في المسألة السابقة، إلا أنه من الممكن إجراء بعض التجارب ورؤية المخرجات.

مسألة (٢,٢,٣)

أسقطنا لوح من الخشب طوله 10 أقدام إلى منشار آلي وقطعه المنشار عشوائياً إلى ثلاثة ألواح أصغر. ما احتمال إنشاء مثلث من الألواح الثلاثة؟

الحل:

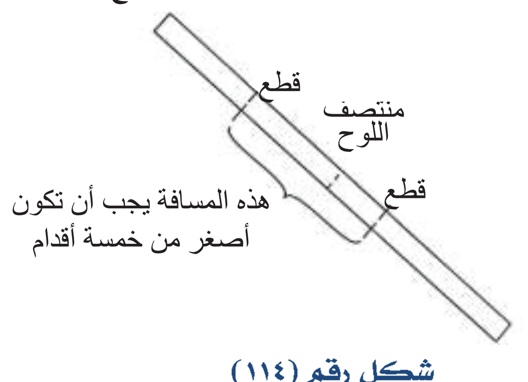
لنفرض أن أطوال الألواح هي A، B، C. إذا كانت هذه أطوال أضلاع مثلث فيجب أن تحقق متباينة المثلث: مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من أو يساوي طول الضلع الثالث. على سبيل المثال، لا يمكن أن تكون $1,2,4$ أطوال أضلاع المثلث.

إذا كان طول أحد الألواح يساوي 5 فالمثلث الذي نحصل عليه هو مثلث تافه، لذا فإننا نفترض أن طول أي من الألواح لا يساوي 5 (احتمال أن يكون طول أي لوح 5 هو 0). ولكن إذا كان طول أي من الألواح الثلاثة أكبر من 5، وليكن A فإن المتباينة $A \le B+C$ غير محققة. لهذا يجب أن تكون جميع الأطوال الثلاثة أصغر من 5. في هذه الحالة تتحقق المتباينات الثلاث للمثلث لأن مجموع أي طولين أكبر من 5. وبهذا نستطيع إنشاء مثلث.

المسألة الآن تكافئ المسألة "ما احتمال أن يكون طول كل من الألواح الثلاثة أصغر من 5 ؟".

ولحساب هذا الاحتمال يكون من الملائم إيجاد نقاط التي تمَّ عندها نشر اللوح. لاحظ أولاً أنه يجب أن تقع نقطتا النشر على جهتين مختلفتين من منتصف اللوح

(لأنه لو وقعت النقطتان على جهة واحدة من المنتصف فإننا سنحصل على لوح طوله أكبر من 5). كما أن المسافة بين نقطتي النشر يجب ألا تزيد على 5 (لأنه لو كان غير ذلك لكان طول القطعة الوسطى أكبر من أو يساوي 5). انظر: الشكل رقم (١١٤). بتحقق هذين الشرطين نكون قد ضمنا أن أطوال الألواح الثلاثة أصغر من 5.



شكل رقم (١١٤)

الآن، احتمال وقوع المنشار على جهتين مختلفتين من المنتصف يساوي 0.5.
كما أن المسافة d بين أي قطعتين يجب أن تحقق $0 < d < 5$ أو $5 < d < 10$. وهما حدثان متساويا الوقوع. إذن، احتمال أن تكون المسافة بين نقطتي نشر أصغر من 5 يساوي 0.5. من ذلك نخلص إلى أن احتمال الحصول على نقاط قطع تحقق الشرطين هو حاصل ضرب الاحتمالين. أي $P = 0.5 \times 0.5 = 0.25$. وهذا هو الاحتمال المطلوب. □

مسألة تحدي (٣،٢،٣)

أسقط لوح من الخشب طوله 10 أقدام إلى منشار آلي وقطعه المنشار عشوائيًّا إلى قطعتين. غضب عامل المنشار ورمى إحدى القطعتين مرة أخرى إلى المنشار فقطعها المنشار عشوائيًّا إلى قطعتين. ما احتمال أن ينشأ مثلث عن القطع الثلاثة؟

مسألة (٤،٢،٣)

لدينا عدد صحيح موجب N من الأشخاص في غرفة. جد أصغر قيمة للعدد

N بحيث أن احتمال وجود شخصان لهما تاريخ الميلاد نفسه أكبر من نصف (تاريخ الميلاد هنا هو اليوم وليس السنة والسنة تساوي 365 يوم).

الحل:

ذكرنا سابقًا أنه يكون من الأسهل إيجاد الاحتمال المتمم في بعض المسائل، وهذه المسألة هي إحدى المسائل التي نجد فيها الاحتمال المتمم ثم نطرح الإجابة من 1 لنحصل على الاحتمال المطلوب.

لذا نفرض أن N هو عدد الأشخاص المتواجدين في الغرفة ونحاول حساب احتمال أن تكون جميع تواريخ ميلادهم مختلفة. لنفرض أن الأشخاص هم $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$. الآن، تاريخ ميلاد P_1 يمكن أن يكون أي يوم من أيام السنة التي عددها 356. بعد أن عرفنا تاريخ ميلاد P_1 فإن تاريخ ميلاد P_2 لا يمكن أن يكون تاريخ ميلاد P_1. لذا فإن تاريخ ميلاد P_2 يمكن أن يكون أي يوم من أيام السنة الـ 364 المتبقية. وبهذا يكون عدد خيارات تاريخ ميلاد P_3 (يختلف عن تاريخ ميلاد P_1 و P_2) هو 363 وهكذا. إذن، عدد الخيارات الممكنة لتواريخ ميلاد مختلفة لـ N شخص هو:

$$365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - (N - 1)).$$

كما أن عدد الخيارات الممكنة لتواريخ ميلاد N من الأشخاص هو:

$$365 \times 365 \times \cdots \times 365 = 365^N.$$

إذن، احتمال أن تكون تواريخ ميلاد N من الأشخاص مختلفة يساوي:

$$P = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - (N - 1))}{365^N}$$

$$= \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365 - (N - 1)}{365}$$

استخدم الآن الحاسب الآلي أو الآلة الحاسبة وابدأ بضرب الكسور من اليسار إلى اليمين حتى تحصل على كسر أصغر من $\frac{1}{2}$ وبعد ذلك توقف. وآخر كسر قمت

بضربه سيكشف عن قيمة N لأن هذا الكسر هو:

$$\frac{365-(N-1)}{365}.$$

أجرى المؤلف هذه الحسابات وقام بضرب 22 كسرًا، وحصل على احتمال 0.52343046 . وعند القيام بضرب الكسر 23 حصل على احتمال 0.4927027 . وبهذا تكون أصغر قيمة للعدد N بحيث يكون احتمال عدم وجود شخصين لهما تاريخ الميلاد نفسه أصغر من $\frac{1}{2}$ هو 23 . إذن، إذا كان $N=23$ فإن احتمال أن يكون لشخصين تاريخ الميلاد نفسه أكبر من $\frac{1}{2}$ (في الحقيقة الاحتمال هو: $1-0.4927027=0.5072973$). □

مسألة تحدي (٥،٢،٣)

دعنا نجري بعض التعديلات على المسألة السابقة:

لنفرض أن عدد أسابيع السنة هو 52 وأن عدد أيام الأسبوع هو 7 (لا نفترض أن أول أيام الأسبوع هو السبت أو أي يوم آخر). ما أصغر قيمة للعدد N (عدد الأشخاص) بحيث إن احتمال وقوع ولادة شخصين في الأسبوع نفسه أكبر من نصف؟ ما الفرق بين هذه الإجابة (إن وجدت) وإجابة المسألة السابقة؟

مسألة تحدي (٦،٢،٣)

ما التغيير الذي سيحصل على مسألة تاريخ الميلاد إذا أخذنا في الاعتبار السنة الكبيسة؟

المسألة التالية هي مسألة وضع الرسائل في مظاريف التي درسناها في البند السابق. بعد دراسة حل هذه المسألة قارن هذا الحل مع المسائل السهلة منها التي سبق وأن درستها في البند (١،٣). ما السبب الذي جعل هذه المسألة أصعب من نظيراتها؟

مسألة (٣،٢،٧)

كتبت 37 رسالة وكتبت عناوين الأشخاص المراد إرسال هذه الرسائل لهم على 37 مظروفًا. من دون النظر إلى الرسائل، بدأت وضع هذه الرسائل عشوائيًّا في المظاريف. ما احتمال أن تضع فقط رسالة واحدة في المظروف الصحيح وأن تضع باقي الـ 36 رسالة في المظاريف الخطأ؟

الحل:

سنرى أن هذه المسألة مختلفة عن نظيرتها السابقة، مع أن الصياغة متشابهة. لنفرض كما في السابق أننا قمنا بترقيم الرسائل من 1 إلى 37 والمظاريف من 1 إلى 37 . الآن، واحدة فقط من الرسائل في المظروف الصحيح. لنفرض أن الرسالة 1 وضعت في المظروف 1 . الآن، يتم وضع الرسائل من 2 إلى 37 في المظاريف من 2 إلى 37 مع شرط عدم وضع الرسالة i بالمظروف i . أي أن المطلوب هنا هو حساب تبديلات 36 عنصرًا مع عدم بقاء أي من هذه العناصر في وضعه الأصلي.

التحليل السابق يبقى صحيحًا لو أننا وضعنا الرسالة 2 في المظروف 2 أو الرسالة 3 في المظروف 3 أو الرسالة 4 في المظروف 4 وهكذا.

إذن، نخلص إلى أن عدد التوزيعات المختلفة للرسائل هو حاصل ضرب 37 في عدد تبديلات 36 عنصرًا مع عدم بقاء أيًا منها في مكانه الأصلي. وبهذا نحصل على حل مسألتنا إذا استطعنا حساب هذا العدد. بعد ذلك نقوم بالقسمة على العدد !37 (أي عدد تبديلات 37 عنصرًا).

وكما هو الحال في العديد من المسائل فإن حل المسألة يقودنا إلى حل مسألة جديدة مهمة بحد ذاتها. نقوم الآن بصياغة وحل المسألة الجديدة ثم نرجع بعد ذلك لإكمال حل مسألتنا.

مسألة جزئية (٨،٢،٣) [برونلي وأويلر: متقدمة]

لنفرض أننا وضعنا k من العناصر المختلفة في المواقع 1 إلى k. كم عدد الترتيبات المختلفة الممكنة لهذه العناصر مع عدم بقاء أياً منها في موقعه الأصلي* ؟

الحل:

لنفرض أن $a_1, a_2, \ldots, a_k$ هي العناصر وأن $P_1, P_2, \ldots, P_k$ مواقعها الأصلية على التوالي. المطلوب هو إيجاد العدد $M(k)$ (عدد ترتيبات $a_1, a_2, \ldots, a_k$ في المواقع $P_1, P_2, \ldots, P_k$ بحيث لا نضع a_j في الموقع P_j لكل j).

ندرس الحالتين التاليتين:

(أ) وضع a_1 في الموقع P_2 و a_2 في الموقع P_1 وتوزيع $a_3, \ldots, a_k$ على المواقع $P_3, \ldots, P_k$.

(ب) وضع a_1 في الموقع P_2 وعدم وضع a_2 في الموقع P_1.

الحالة (أ): بما أن موقعي a_1 و a_2 محددان سلفاً فإنه يتبقى $k-2$ من العناصر $a_3, \ldots, a_k$ لتوزيعها على $P_3, \ldots, P_k$ بحيث عدم وضع a_j في الموقع P_j. لكن هذا العدد هو $M(k-2)$.

الحالة (ب): يمكن النظر إلى هذه الحالة كالتالي: المطلوب هو توزيع العناصر $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k$ على المواقع $P_1, P_3, P_4, \ldots, P_k$ بحيث لا نضع a_2 في الموقع P_1 ولا a_3 في الموقع P_3 ولا نضع a_4 في الموقع P_4 وهكذا. هذا العدد هو $M(k-1)$.

من ذلك نجد أن عدد الترتيبات الممكنة بحيث يكون a_1 في الموقع P_2 هو $M(k-2) + M(k-1)$.

الآن، وبصورة متشابهة نجد أن عدد الترتيبات الممكنة بحيث يكون a_1 في الموقع

* المترجمان: الاسم الشائع لهذه الترتيبات هو التبديلات التامة (derangements).

P_3 هو $M(k-2)+M(k-1)$ وعدد الترتيبات الممكنة بحيث نضع a_1 في الموقع P_4 هو $M(k-2)+M(k-1)$. وهذا هو العدد الذي نحصل بوضع a_1 في أي من المواقع $P_5, P_6, \ldots, P_k$. من ذلك نجد أن العدد الكلي لهذه الترتيبات هو:

$$M(k)=(k-1)\left[M(k-2)+M(k-1)\right]$$

أو

$$M(k)=kM(k-1)-M(k-1)+(k-1)M(k-2)$$

أو

$$(*) \qquad M(k)-kM(k-1)=(-1)\left[M(k-1)-(k-1)M(k-2)\right]$$

تسمى $(*)$ علاقة إرجاعية (recursion relation) للدالة $M(k)$ ، والعلاقات الإرجاعية من الأدوات المهمة في دراسة الرياضيات المنتهية.

بكتابة $(*)$ لكل من الحالات $3,4,5,\ldots,k$ نجد أن :

$$M(3)-3M(2)=(-1)\left[M(2)-2M(1)\right]$$
$$M(4)-4M(3)=(-1)\left[M(3)-3M(2)\right]$$
$$M(5)-5M(4)=(-1)\left[M(4)-4M(3)\right]$$
$$\cdots$$
$$M(k)-kM(k-1)=(-1)\left[M(k-1)-(k-1)M(k-2)\right]$$

بتعويض المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نجد أن

$$M(4)-4M(3)=(-1)^2\left[M(2)-2M(1)\right]$$

وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة الثالثة وهكذا، نحصل في النهاية على:

$$M(k)-kM(k-1)=(-1)^{k-2}\left[M(2)-2M(1)\right]$$

الآن،

$(-1)^{k-2}=(-1)^k$ و $M(1)=0$ و $M(2)=1$.

إذن،

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^k$$

بقسمة طرفي المعادلة على $k!$ نجد أن:

$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!} \qquad (**)$$

وبكتابة $(**)$ للحالات $2,3,4,\ldots,k$ نجد أن:

$$\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!}$$

$$\frac{M(3)}{3!} - \frac{M(2)}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!}$$

$$\frac{M(4)}{4!} - \frac{M(3)}{3!} = \frac{(-1)^4}{4!}$$

$$\cdots$$

$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

بجمع هذه المعادلات وإجراء الاختصارات في الطرف الأيسر (حدود تناوبية) نجد أن:

$$\frac{M(k)}{k!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \frac{(-1)^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}$$

أو

$$M(k) = k!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right]$$

وهذا هو عدد الترتيبات الممكنة للعناصر $a_1,\ldots,a_k$ في المواقع $P_1,\ldots,P_k$ بحيث لا يقع a_j في الموقع P_j لكل j. □

نعود الآن لإكمال حل المسألة (٧,٢,٣). وجدنا لحد الآن عدد الطرق أحد الرسائل في المظروف الصحيح ووضع الرسائل الـ 36 في المظاريف الخاطئة وهذا العدد هو $37M(36)$. إذن، الاحتمال المطلوب هو:

$$P = \frac{37M(36)}{37!} = \frac{37}{37!} \times 36!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{36!}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{36!}\right]$$

وهذه هي الإجابة النهائية للمسألة(٧,٢,٣). □

مسألة(٩,٢,٣) [بفون: تحتاج إلى تفاضل وتكامل]

أرضية مسطحة مفروشة بألواح خشبية عرض كل منها ست بوصات (انظر الشكل رقم ١١٥). ألقت فتاة عصا، سمكها قليل جداً وطولها أربع بوصات على الأرضية. كررت الفتاة إلقاء العصا عدد كبير من المرات وليكن N . احسب احتمال قطع العصا لأحد الشقوق الصغيرة بين أي اللوحين من الخشب كدالة في N . ما قيمة هذا الاحتمال عندما $N \to \infty$ ؟



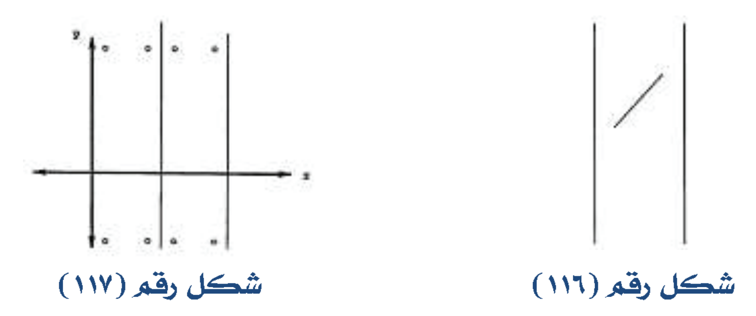
شكل رقم (١١٥)

الحل:

هذه المسألة تقليدية تسمى "مسألة الإبرة لبفون". من الواضح أن احتمال قطع العصا لأحد الشقوق يعتمد على زاوية سقوط العصا (انظر: الشكل لرقم ١١٦). على سبيل

المثال، إذا سقطت العصا موازية للشقوق فاحتمال قطعها لأحد الشقوق صغير جدًّا، أما إذا سقطت عمودية على الشقوق فاحتمال قطعها يكون كبيرًا في هذه الحالة. وبما أن مسألة قطع العصا لأحد الشقوق تعتمد على زاوية سقوطها فمن المتوقع أن تكون الإجابة بدلالة π. في الحقيقة، إن إلقاء عصا على الأرضية هو إحدى طرائق حساب π.

نقوم باختيار نظام إحداثيات كما هو مبين في الشكل رقم (١١٧).



شكل رقم (١١٦) شكل رقم (١١٧)

محور x عمودي على اتجاه الشقوق ومحور y يوازي الشقوق. نختار نقطة الأصل لتنطبق على أحد الشقوق، وبهذا فإن محور y هو أحد الشقوق.

لجعل حل المسألة ممكنًا نضع بعض الفرضيات: نفرض أولاً أن سمك العصا صغير جدًّا (يكاد أن يكون معدومًا كسمك قطعة مستقيمة). نفترض أيضًا أن أحد طرفي العصا مطليًّا باللون بالأحمر. نقوم بقياس "زاوية العصا" على النحو التالي: يتم إزاحة العصا من دون تدويرها بحيث يقع الطرف غير المطلي عند نقطة الأصل. بعد ذلك نقوم بقياس الزاوية الموجهة بين محور x الموجب والعصا باتجاه عكس دوران عقارب الساعة (بالطريقة نفسها التي تقيس بها الزاوية عند دراستك لدالتي الجيب وجيب التمام). إذا كان قياس الزاوية يساوي θ راديان فإننا نقول: إن العصا تصنع زاوية مقدارها θ راديان مع محور x الموجب.

لنفرض الآن أن $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. سنركز اهتمامنا على وقوع العصا على الأرض بزاوية θ وما عدا ذلك فإن الوقوع عشوائي. ما احتمال قطع العصا لأحد الشقوق؟ من

الواضح أن الوضع الرأسي للعصا ليس مهمًا لأنه لا يؤثر في قطع العصا لأحد الشقوق. ولكن المهم هنا هو الوضع "يمين – يسار" للعصا. وهذه المسألة دورية: عند تحرك الطرف الأيسر للعصا من 0 إلى 6 بزاوية ثابتة، فإنه ولمسافة معينة لا تلمس العصا أي من الشقوق وبعد ذلك تقطع شقًّا وتتحرك من اليسار إلى اليمين قاطعة هذا الشقّ. عند وصول نهاية العصا عند 6 فإنها تعيد الدورة (أي أن الحركة تكون مشابهة كما لو أن الطرف الأيسر للعصا عند 0).

نحتاج هنا إلى القليل من حساب المثلثات. طول العصا يساوي 4 بوصات، وعندما تكون الزاوية التي تصنعها هي θ فإن المسافة الأفقية من اليسار إلى اليمين تساوي $4\cos\theta$، لذا فعندما يقع الطرف الأيسر للعصا بين 0 و $6-4\cos\theta$ فإن العصا لن تقطع شقًّا. وأما إذا وقع الطرف الأيسر للعصا بين $6-4\cos\theta$ و 6 فإن العصا تقطع شقًّا. إذن، احتمال قطع العصا الساقطة بزاوية θ لشق هو:

$$P_\theta = \frac{4\cos\theta}{6}$$

هذا الوضع يكرر نفسه في الفترات $\pi \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le \pi$ أو $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$. لذا ندرس الحالة عندما $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

إن فرصة صنع زاوية θ عند وقوع العصا يساوي فرصة صنع أي زاوية أخرى. ولذا فإن الاحتمالات P_θ متساوية. وبالتالي فإن الاحتمال المطلوب هو متوسط الاحتمالات P_θ حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. أي أن احتمال قطع العصا لأحد الشقوق هو:

$$\frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{6}\,d\theta = \frac{4}{3\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = \frac{4}{3\pi}.$$ □

ملحوظة

السطر الأخير من حلِّ المسألة هو السطر الوحيد الذي استخدمنا فيه التفاضل والتكامل. من الممكن تجنب ذلك باستخدام بغض الأفكار التي استخدمت أصلاً في تطوير حساب التفاضل والتكامل. وعوضًا عن إيجاد متوسط P_θ باستخدام التكامل (الذي من المحتمل ألا تكون على معرفة مسبقة به). قم بإتباع ما يلي: قسم الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ إلى 100 فترة جزئية من الطول نفسه. احسب قيمة P_θ عند 100 قيمة للزاوية θ كل قيمة منها مختارة من أحد الفترات الجزئية (يمكن أن تحتاج حاسب آلي لإجراء ذلك). اجمع الإجابات المائة التي حصلت عليها ثم اقسم الناتج على 100. عندئذ، ستحصل على نتيجة قريبة جدًا من القيمة $\frac{4}{3\pi}$.

أجرى مؤلف الكتاب تجربة إلقاء عصا طولها 4 بوصات على أرضية مكونة من ألواح خشبية عرض كل منها 6 بوصات. وجد المؤلف أن العصا قطعت الشق 46 مرة من 100 مرة. لذا فإن الاحتمال هو 0.46. وبمساواة ذلك مع ما وجدناه في المسألة وهو $\frac{4}{3\pi}$ نجد قيمة تقريبية للعدد π وهي 2.9. هذه القيمة ليست دقيقة، لكن بإلقاء العصا عدداً كبيراً من المرات نحصل على تقريب أفضل من ذلك.

أجرى وُلف (Wolf) تجربة في زيوريخ عام 1850 باستخدام عصا طولها 36 ملم على ألواح خشبية عرضها 45 ملم. وبعد تعديل للصيغة التي حصلنا عليها في المسألة السابقة لتتلاءم من تجربته وجد أن القيمة التقريبية للعدد π بعد 5000 إلقاء للعصا يساوي 3.1536. وفي عام 1855 أجرى سميث (Smith) التجربة في بريطانيا بإلقاء العصا 3200 وحصل على قيمة تقريبية للعدد π تساوي 3.1553. أما فوكس (Fox) فقد أجرى التجربة في بريطانيا عام 1864 بإلقاء العصا 1100 وحصل على القيمة التقريبية 3.1419 للعدد π.

مسألة تحدي (٣,٢,١٠)

استخدم طريقة حل مسألة الإبرة لبفون عندما يكون عرض كل من الألواح الخشبية d وطول العصا l. ما الميزة الجديدة التي تظهر عندما يكون $l > d$ ؟

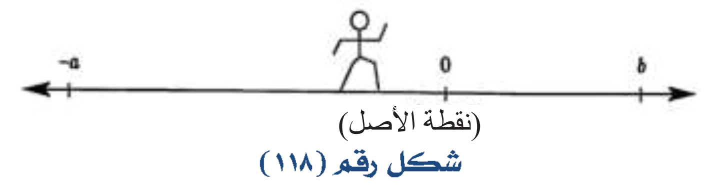
نناقش الآن مسألة من مسائل الاحتمال المهمة تدعى "المسارات العشوائية".

مسألة (٣,٢,١١)

افترض (تخيل) أن شخصاً يمشي على خط الأعداد الحقيقية بخطوات طول كل منها 1 بحيث يبدأ من نقطة الأصل. يتحرك هذا الشخص خطوة خطوة طول كل منها 1 إلى اليمين أو إلى اليسار. يتم تحديد اتجاه الخطوة بإلقاء قطعة نقود. الصورة تقابل خطوة إلى اليسار والكتابة تقابل خطوة إلى اليمين. فمثلاً، إذا كانت نتائج إلقاء قطعة النقود 6 مرات هي H، H، T، H، T، H فيتحرك الشخص خطوتين إلى اليسار، خطوة إلى اليمين، خطوة إلى اليسار، خطوة إلى اليمين، خطوة إلى اليسار. لذا بعد تحركه الخطوات الست هذه يكون موقعه عند النقطة -2.

تصور الآن وجود "حاجزي امتصاص" أحداهما عند النقطة $-a$ والآخر عند النقطة b، حيث a و b عددان صحيحان موجبان كما هو مبين في الشكل رقم(١١٨). إذا وصل الشخص إلى النقطة $-a$ أو النقطة b فإنه يتم "امتصاصه" وتنتهي الرحلة مباشرة. السؤال هنا:

ما احتمال انتهاء اللعبة عند وصول اللاعب عند النقطة $-a$ ؟



شكل رقم (١١٨)

الحل:

من الواضح حدسياً على الأقل أنه إذا كان $a = b$ فإن الشخص الذي يبدأ بالتحرك من نقطة الأصل (مسافة متساوية عن كل من $-a$ و b) تكون فرصة امتصاصه

عند $-a$ مساوية لفرصة امتصاصه عند b. وإذا كان $a > b$ فإن فرصة امتصاصه عند b أكبر من فرصة امتصاصه عند $-a$ (لأن b أقرب إلى نقطة الأصل). أما إذا كان $a < b$ فإن فرصة امتصاصه عند b أصغر من فرصة امتصاصه عند $-a$ (لأن b أبعد إلى نقطة الأصل). ولكننا نسعى إلى إجابة كمية.

من المناسب استخدام بعض الترميزات. لنفرض أن الشخص واقفاً الآن عند n ولنفرض أن r_n هو احتمال أن يتم امتصاص الشخص عند $-a$. نجد الآن العلاقة بين r_n، r_{n-1}، r_{n+1}. إذا كان الشخص واقفاً عند n فإن الخطوة التالية ستكون إما إلى $n-1$ أو إلى $n+1$ بفرص متساوية. إذا تحرك الشخص في الخطوة التالية إلى $n-1$ فإن احتمال امتصاصه عند $-a$ هو r_{n+1}. كل من هذين الاحتمالين متساوياً الفرص. إذن،

$$r_n = \frac{1}{2}\left[r_{n-1} + r_{n+1}\right]$$

من هذه المعادلة نجد أن r_n دالة خطية في المتغير n (ارسم بيان $r_n = r(n)$ لبعض قيم n). لذا فإن:

$$r_n = \alpha n + \beta$$

وهذه هي الصيغة العامة للدالة الخطية.

لكننا نعلم أنه إذا كان الشخص عند $-a$ فإنه يتم امتصاصه، وبهذا فإن $r_{-a} = 1$. أيضاً إذا كان الشخص عند b فإنه يتم امتصاصه. لذا فإن $r_b = 0$. من ذلك نجد أن:

$$1 = r_{-a} = \alpha(-a) + \beta$$
$$0 = r_b = \alpha n + \beta$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على:

$\alpha = \dfrac{-1}{a+b}$ و $\beta = \dfrac{b}{a+b}$.

ويكون:

$$r_n = \left(\frac{-1}{a+b}\right)n + \frac{b}{a+b} = \frac{b-n}{a+b}.$$

ما الذي تقدمه لنا هذه المعادلة عن المسألة الأصلية؟ لاحظ أن r_n هو احتمال إنهاء اللعبة عندما يكون الشخص عند $-a$ إذا كان الشخص واقفًا عند n. على وجه الخصوص، إذا كان الشخص واقفًا عند 0 فإن:

$$r_0 = \frac{b}{a+b}$$

بتبديل الأدوار بين a و b فإننا نجد أيضًا أنه إذا كان الشخص واقفًا عند 0 فإن الاحتمال s_0 لامتصاصه عند b هو:

$$s_0 = \frac{a}{a+b}$$

إذن، نكون قد أثبتنا أنه إذا كان $a = b$ فإن الاحتمالين متساويين. وفي بداية المسألة بينا الحالتين الأخريين. □

مسألة تحدي (١٢,٢,٣)

القيمة المتوقعة (expected value) للاحتمال هي متوسط جميع المخرجات الممكنة. ما القيمة المتوقعة للخطوات قبل انتهاء اللعبة المقدمة في المسألة السابقة؟ [إرشاد: افرض أن M_n هو عدد الخطوات قبل امتصاص الشخص على فرض أن الشخص واقف الآن عند n. ولنرمز للقيمة المتوقعة للعدد M_n بالرمز $E(M_n)$. الآن، جد علاقة بين $E(M_n)$ وكل من $E(M_{n-1})$ و $E(M_{n+1})$. لاحظ أن هذه العلاقة ليست مماثلة للعلاقة التي وجدناها في المسألة السابقة لأننا الآن نحسب عدد الخطوات وليس الاحتمال !].

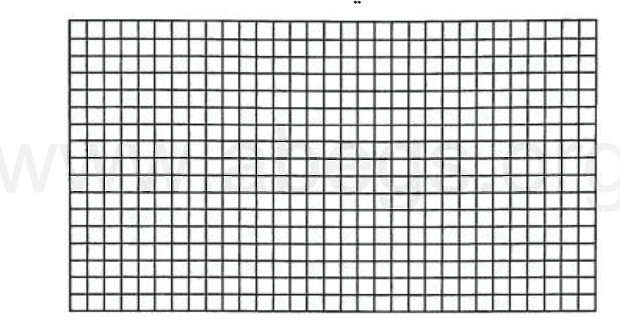
كملحوظة أخيرة نقدم التعليق التالي عن اللعبة المشهورة "مسألة الهدم-ruin problem": يلعب هذه اللعبة فريق مكون من لاعبين A و B. يبدأ اللاعب A بمبلغ a دولار، ويبدأ اللاعب B بمبلغ b دولار. يتم إلقاء قطعة نقود. إذا وقعت القطعة على

صورة يدفع اللاعب A إلى B دولاراً واحداً وإذا وقعت القطعة على كتابة يدفع اللاعب B إلى A دولارًا واحدًا. قدِّم تفسيرًا للمسألة السابقة ومسألة التحدي السابقة بدلالة هذه اللعبة.

(٣،٣) مسائل عد إضافية
More on Counting

مسألة (٣،٣،١)

قسمنا مستطيل طوله 31 وعرضه 17 إلى مربعات طول ضلع كل منها 1. ما عدد المستطيلات غير التافهة التي يمكن رسمها باستخدام مستقيمات المستطيل لتحديدها؟ انظر الشكل رقم (١١٩) [هنا "غير تافه" يعني أن طول وعرض المستطيل موجبان].



شكل رقم (١١٩)

الحل:

نحتاج إلى طريقة مقنعة لعد المستطيلات. لاحظ أنه يتم تحديد المستطيل تمامًا بمعرفة ركنه الأسفل الأيسر وطوله وعرضه.

يمكن اعتبار الركن الأسفل الأيسر لمستطيل في الشكل رقم (١١٩) على أنه نقطة الأصل ومن ثم تحديد النقاط الأخرى بالطريقة المعتادة في المستوى الإحداثي (حيث طول ضلع المربع يساوي 1). كم عدد المستطيلات التي ركنها الأيسر هو نقطة الأصل؟ للإجابة عن ذلك، لاحظ أن هناك 31 عرضًا محتملاً من 1 إلى 31 و 17 طولاً محتملاً من 1 إلى 17. إذن، عدد هذه المستطيلات هو $527 = 17 \times 31$.

هذه بداية جيدة ولكنها تتطلب جهدًا مضنيًّا لعد جميع المستطيلات الممكنة.

وعوضًا عن ذلك نستخدم التحليل التالي: لنفرض أننا بدأنا في المستطيلات التي ركنها السفلي الأيسر عند النقطة (j,k) حيث $0 \le j \le 30$ و $0 \le k \le 16$. يوجد $31-j$ عرضاً و $17-k$ طولاً لمثل هذه المستطيلات. إذن، عدد هذه المستطيلات هو $(31-j)\times(17-k)$. وبهذا نجد أن العدد الكلي المستطيلان غير التافهة هو:

$$S=\sum_{j=0}^{30}\sum_{k=0}^{16}(31-j)(17-k)$$

وباستخدام قانون التوزيع نجد أن:

$$\begin{aligned}S&=\sum_{j=0}^{30}\sum_{k=0}^{16}[527-17j-31k+jk]\\&=\sum_{j=0}^{30}\sum_{k=0}^{16}527-\sum_{j=0}^{30}\sum_{k=0}^{16}17j-\sum_{j=0}^{30}\sum_{k=0}^{16}31k+\sum_{j=0}^{30}\sum_{k=0}^{16}jk\\&=527\times31\times17-17\times17\times\sum_{j=0}^{30}j\\&\quad-31\times31\times\sum_{k=0}^{16}k+\left(\sum_{j=0}^{30}j\right)\left(\sum_{k=0}^{16}k\right)\end{aligned}$$

وباستخدام صيغة جاوس من البند (٢,١) لإيجاد هذه المجاميع نجد أن:

$$S=277729-289\times465-961\times136+465\times136$$

$$S=277729-134385-130696+63240$$

$$^{*}S=75888$$

□

* المترجمان: يمكن إيجاد هذا العدد على النحو التالي: كل مستطيل يتحدد تماماً بمستقيمين أفقيين ومستقيمين رأسيين. عدد طرق اختيار مستقيمان رأسيان هو $\binom{32}{2}$ وعدد طرق اختيار مستقيمان أفقيان هو $\binom{18}{2}$. إذن، عدد المستطيلات هو $75888=\frac{18\times17}{2}\times\frac{32\times31}{2}=\binom{32}{2}\binom{18}{2}$.

بينا في الفصل الأول كيفية استخدام الاستقراء الرياضي لإيجاد صيغة مغلقة لمجاميع منتهية مثل، $1+2+3+\cdots+k$. نقوم الآن بدراسة نمط آخر يعرف بالمجموع الهندسي.

مسألة (٢.٣.٢)

إذا كان λ عددًا حقيقيًّا وكان k عددًا صحيحًا موجبًا فاحسب:

$$S = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^k$$

الحل:

مفتاح الحل هنا هو ملاحظة أن ضرب طرفي المعادلة بالعدد λ لا يغير الكثير. في الحقيقة:

$$\lambda S = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^k + \lambda^{k+1}$$

الفرق بين المجموعين S و λS هو احتواء المجموع الأول على العدد 1 واحتواء المجموع الثاني على المقدار λ^{k+1}. من ذلك نجد أن:

$$S - 1 = \lambda S - \lambda^{k+1}$$

$$(\lambda - 1)\mathrm{S} = \lambda^{k+1} - 1$$

$$S = \frac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1} \qquad \square$$

المثال التالي تطبيق على المسألة السابقة: لنفرض أننا نريد حساب المجموع:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{100}$$

من الواضح أن جمع الحدود حدًّا حدًّا هو أمر مضني. وعوضًا عن ذلك، بملاحظة أن هذا المجموع هو متسلسلة هندسية حيث $\lambda = \frac{1}{3}$ و $k = 100$ نجد أن:

$$S = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{101} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{101}\right]$$

الآن، باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$$S = 1.5 - 9.702 \times 10^{-49}$$

في الحالة التي يكون فيها $-1 < \lambda < 1$ و $k \in \{1,2,3,\cdots\}$ نجد من المسألة السابقة أن المجموع $S_k = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^k$ هو:

$$S_k = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda} \qquad (*)$$

ما الذي يحدث لو أننا جمعنا عددًا غير منته من قوى λ عوضًا عن اقتصار المجموع على عدد منته من هذه القوى. إن هذا يعني (ستتعلم المعنى الدقيق لذلك عند دراسة التفاضل والتكامل) جعل k تؤول إلى ما لانهاية في المعادلة $(*)$.

بهذا يكون المطلوب إيجاد مجموع جميع القوى غير السالبة للعدد λ. أو:

$$S = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots$$

أي أن السؤال الآن هو: ما الذي يؤول إليه الطرف الأيمن من $(*)$ عندما يزداد k بلا حدود. بما أن $|\lambda| < 1$ فمن المتوقع أن يصبح المقدار λ^{k+1} أصغر فأصغر. في الحقيقة سيؤول إلى 0 عندما يزداد k بلا حدود. أي أن $S_k \to \frac{1}{1-\lambda}$ وتكتب ذلك على الصورة:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} \qquad (**)$$

هذا شكل آخر من الترميز الرياضي القياسي للمجموع (انظر: بداية البند ٢،٣). يسمى الرمز $\sum$ "سيجما الكبير" ويرمز لمجموع الحدود. الحد السفلي يعني أن

نبدأ المجموع بالقوة $k = 0$ والحد الأعلى غير محدود (أي أننا نقوم بجمع جميع قوى العدد λ).

مثال توضيحي على ذلك: ما قيمة المجموع:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \text{؟}$$

ارسم الفترة $[0,2]$ على مسودة. مجموع أول حدين يساوي $\frac{3}{2}$. بجمع الحد الثالث ستجد أنك ستصل إلى منتصف المسافة الباقية للعدد 2. في الحقيقة، إضافة أي حد سيحقق هذه الخاصية. لذا يمكن تخمين الإجابة على أنها تساوي 2.

في الحقيقة، الصيغة التي قدمناها ستؤكد صواب ذلك:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

نستخدم هذه الحقائق عن المتسلسلة الهندسية في المسألة التالية:

مسألة (٣.٣.٣) متتالية فيبوناتشي (Fibonacci)

متتالية فيبوناتشي هي إحدى المتتاليات المشهورة جداً في الرياضيات، وفي الحقيقة في جميع المجالات العلمية المختلفة. يتم إنشاء هذه المتتالية على النحو التالي: كل من الحدين الأول والثاني يساوي 1. الحد الثالث هو مجموع الحدين الأول والثاني، أي أن الحد الثالث يساوي 2. الحد الرابع هو مجموع الحدين الثاني والثالث، أي أن الحد الرابع هو $1 + 2 = 3$. الحد الخامس هو مجموع الحدين الثالث والرابع، أي هو $2 + 3 = 5$. وبصورة عامة، أي حد ابتداءً من الحد الثالث هو مجموع الحدين السابقين له. الحدود العشرة الأولى لمتتالية فيبوناتشي هي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

نرمز للحد ذي الرتبة j بالرمز a_j. إذن،

$a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $a_2 = 2$ ، $a_3 = 3$ ، $a_4 = 5$ وهكذا.

أثبت صواب الصيغة المغلقة التالية لمتتالية فيبوناتشي:

$$a_j = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j}{\sqrt{5}}.$$

الحل:

نستخدم طريقة الدوال المولدة (generating functions) وهي إحدى الطرائق المهمة التي تستخدم في جميع مجالات العلوم الرياضية.

نفرض أن $F(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^2 + \cdots$ حيث a_j هي حدود متتالية فيبوناتشي و x متغير. ليس من المهم هنا معرفتنا للمتغير x حيث سنعالج الدالة F بأسلوب يجعلنا قادرين على إيجاد قيم المعاملات a_j. ولهذا يمكن أن نعتبر $F(x)$ كثيرة حدود عدد معاملاتها غير منته. لاحظ الآن أن:

$$xF(x)x = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots$$
$$x^2F(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + \cdots$$

بتجميع المعاملات المتشابهة لقوى x نجد أن:

$$\begin{aligned} F(x) - xF(x) - x^2F(x) \\ = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 \\ +(a_3 - a_2 - a_1)x^3 + (a_4 - a_3 - a_2)x^4 + \ldots \end{aligned}$$

ولكن من تعريف متتالية فيبوناتشي نجد أن :

$a_2 - a_1 - a_0 = 0$ ، $a_3 - a_2 - a_1 = 0$ ،

وهكذا. إذن، المعادلة أعلاه تكافئ:

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x$$

وبما أن $a_0 = a_1 = 1$ فنجد أن:

$$(1 - x - x^2)F(x) = 1$$

إذن،

$$(***) \qquad F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\left[1 - \frac{-2}{1-\sqrt{5}}x\right]\left[1 - \frac{-2}{1+\sqrt{5}}x\right]}$$

(اضرب قوسي الطرف الأيمن لترى أن النتيجة تساوي $1 - x - x^2$). وببعض المعالجات الجبرية نجد أن:

$$F(x) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left[\frac{1}{1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}x}\right] + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left[\frac{1}{1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}x}\right]$$

الآن، باستخدام الصيغة (**) على الكسرين داخل الأقواس [ ] نجد أن:

$$F(x) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}x\right)^j + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}x\right)^j$$

وبتجميع قوى x المتشابهة نجد أن

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^j + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^j\right]x^j$$

ولكن،

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

إذن، بمقارنة المعاملات نجد أن:

$$a_j = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^j + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^j$$

ولكن،

$$\frac{5+\sqrt{5}}{10}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{،} \quad \frac{5-\sqrt{5}}{10}=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \text{،}$$

$$-\frac{2}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{،} \quad -\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

بالتعويض عن ذلك بالمعادلة السابقة والتبسيط نجد أن :

$$a_j=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j}{\sqrt{5}}$$ ❖

وهذا هو المطلوب. □

نقدم في نهاية هذا الفصل بعض التمارين على استخدام الدوال المولِّدة. قبل محاولة حل هذه التمارين ننصحك بمراجعة كيفية استخدام هذه الطريقة على متتالية فيبوناتشي. لاحظ كيفية تجميع F ، xF ، x^2F بحيث نحصل على اختصارات مهمة. وهنا استخدمنا خصائص متتالية فيبوناتشي. في مسائل أخرى، مثل تلك المقدمة في نهاية الفصل ستحتاج إلى إجراء تركيبات مختلفة بمعاملات أخرى تتلائم مع المسألة.

(٤,٣) مسألة الزواج التقليدية وأفكار ذات علاقة بها ❖

The Classical Marriage Problem and Related Ideas

لفهم مسألة الزواج، نقدم المسألة المعدلة البسيطة التالية:

بلغ أحمد سنّ الزواج وطلب من والدته أن تبحث له عن زوجة مناسبة وكانت

❖ المترجمان: حاول إثبات الصيغة باستخدام الاستقراء الرياضي على j .

❖ المترجمان: قمنا بترجمة الفقرات السابقة للمسألة (١,٤,٣) بتصرف لتتلائم مع قيم مجتمعنا؛ ذلك من دون التأثير في السياق العام.

شروط البحث كما يلي: يسمح له بانتقاء زوجة من بين 100 مرشحة على الأكثر بشرط أن يقابل مرشحة واحدة كل مرة ويتخذ قرار اختيارها أو الانتقال إلى المرشحة التي تلي ذلك. لاحظ أنه يعرف المرشحات اللواتي سبق وأن قابلهن، لكنه لا يعرف أي معلومة عن المرشحات اللواتي لم يقابلهن بعد. لذا يكون اتخاذ قراره بعد مقابلة مرشحة بأن يقول: "هذه أفضل مرشحة مناسبة قابلتها لحدِّ الآن"، وعلى هذا الأساس يتخذ قراره بالزواج منها أو أن يقول: "هذه الآنسة تتمتع بصفات مناسبة جداً، لكنني سأغامر وأقابل مرشحات بعدها على أمل إيجاد مرشحة أفضل منها".

"مسألة الزواج" هي تحديد الإستراتيجية الأفضل التي يقررها أحمد في اختيار عروس المستقبل ونعيد صياغتها كالتالي:

مسألة (١,٤,٣)

كتبنا على كل من مائة ورقة عدداً صحيحاً موجباً مختلفاً (الأعداد ليست بالضرورة من 1 إلى 100 ولكنها أي مائة عدد عشوائي) ووضعناها في وعاء. يقوم أحمد بسحب ورقة من الوعاء ثم يقرأ العدد المكتوب عليها. بعد ذلك يقرر هل يقبل هذا العدد ويأخذ عدداً من الدولارات تساوي هذا العدد أو يقرر عدم قبول العدد ويسحب ورقة أخرى من الوعاء.

لاحظ أنه يسمح لأحمد بمعرفة جميع الأعداد التي سحبها سابقاً قبل أن يقرر قبول العدد الذي سحبه آخر مرة أو رفضه وسحب عدداً تالياً. إذا رفض أحمد جميع الأعداد التسع وتسعين الأولى فيكون عليه قبول العدد المكتوب على الورقة مائة.

ما الإستراتيجية الأفضل لأحمد؟ [هنا "الإستراتيجية الأفضل" تعني حصول أحمد على العدد الأكبر من بين المائة عدد].

يعترف المؤلف بأنه عندما طرح عليه السؤال لأول مرة، فكر لمدة دقيقة واحدة وكانت إجابته: "لا توجد إستراتيجية، إن هذا أمر مستحيل". أحد الأسباب لهذه

الإجابة هو عدم معرفته حينها بمعنى إستراتيجية، لكن السبب الأهم أنه لم يسمح لنفسه بوقت كاف للتفكير بالمسألة.

سنفترض مقدمًا أن الإستراتيجية تأخذ الشكل التالي: يقوم أحمد بسحب عدد من الأوراق وليكن k ويلاحظ باهتمام الأعداد المسجلة عليها. بعد ذلك يقرر أحمد سحب ورقة جديدة تحقق "الخاصية P" حيث يتم لاحقًا تحديد الخاصية P. سنشرح لاحقًا السبب وراء الاهتمام في هذا النمط من الإستراتيجيات.

الحل:

نرمز للورقة المسحوبة الأولى بالرمز "ورقة 1"، الورقة المسحوبة الثانية بالرمز "ورقة 2" وهكذا. هدفنا هو الحصول على أكبر عدد من الدولارات. أي إستراتيجية تنتهي باختيار الورقة $(l+1)$ حيث $l \geq k$ يمكن تحسينها بأن نتذكر أكبر عدد M مكتوب على الأوراق $1,2,\ldots,l$ ومن ثم اختيار الورقة بعد ذلك التي تحمل عددًا أكبر من M (إذا لم توجد ورقة تحقق ذلك فإن أحمد يكون مجبرًا على اختيار الورقة الأخيرة). بتطبيق هذه الملاحظة مرة بعد مرة نجد أن الإستراتيجية الأفضل هي ملاحظة أكبر عدد M مكتوب على الأوراق $1,2,\ldots,k$ ومن ثم اختيار ورقة تالية مكتوب عليها عددًا أكبر من M.

بعد ذلك يكون على أحمد اختيار أفضل k. لنفرض أن Q (أكبر الأعداد المكتوبة على الأوراق المائة) سيكون مكتوبًا على الورقة $r+1$. عندئذ، لن ينجح أحمد باختيار هذا العدد مالم يتحقق الشرطان التاليان:

(١) $r \geq k$ (لأن أحمد سيرفض أول k ورقة، فإذا كان $r < k$ فإنه يتم رفض الورقة $r+1$ والتي تحمل العدد الأكبر).

(٢) العدد الأكبر من بين الأعداد المكتوبة على الأوراق من 1 إلى r يساوي العدد الأكبر من بين الأعداد المكتوبة على الأوراق من 1 إلى k (إذا كان العدد

الأكبر P المكتوب على الأوراق 1 إلى r أكبر من العدد الأكبر M المكتوب على الأوراق من 1 إلى k فإن $P < Q$ ويكون قد تمَّ اختيار العدد P قبل الوصول إلى الورقة $r+1$).

احتمال أن يكون العدد الأكبر Q مكتوبًا على الورقة $r+1$ (أو أي ورقة أخرى) هو $\frac{1}{100}$. واحتمال إيجاد الورقة المكتوب عليها العدد Q بفرض أن الورقة $r+1$ هو $\frac{k}{r}$ (ما الخطأ لو كان $r = k+1$). وبهذا فإن احتمال كسب اللعبة حيث Q مكتوباً على الورقة $r+1$ وبفرض أن أحمد سيرفض أول r ورقة ويختار الورقة $r+1$ هو:

$$p_r = \frac{1}{100} \times \frac{r}{k}$$

وبأخذ القيم $r = k\,, k+1\,, \ldots ,99$ نجد أن احتمال كسب اللعبة بتبني الإستراتيجية السابقة هو:

$$p = \sum_{r=k}^{99} p_r = \frac{k}{100} \sum_{r=k}^{99} \frac{1}{r} \qquad (*)$$

نبين الآن طريقة لحساب المجموع في الطرف الأيمن من $(*)$.

إذا كان x عددًا موجبًا صغيرًا فيمكن كتابة:

$$\ln(1+x) = x \left\{ \ln\left[1+x\right]^{\frac{1}{x}} \right\}$$

المقدار داخل لوغاريتم الطرف الأيمن هو المقدار المستخدم في تعريف عدد أويلر (Euler's number) $e \approx 2.718\ldots$ عندما $x \to 0$. لذا فإن:

$$\ln(1+x) \approx x \ln e = x$$

نستخدم هذه الملاحظة لإيجاد المجموع على النحو التالي:

$$\ln N = \ln\left[\frac{N}{N-1}\times\frac{N-1}{N-2}\times\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}\right]$$
$$= \ln\left(\frac{N}{N-1}\right)+\ln\left(\frac{N-1}{N-2}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{N-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{N-2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)$$

وباستخدام الملاحظة السابقة $\ln(1+x)\approx x$ حيث $x>0$ على كل من حدود الطرف الأيمن نجد أن:

$$\ln N \approx \frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$$

[احسب هذا التقريب على الآلة الحاسبة أو الحاسب الآلي لاختيار دقته]. الآن،

$$\sum_{r=k}^{99}\frac{1}{r}=\sum_{r=1}^{99}\frac{1}{r}-\sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{r}\approx \ln 99-\ln(k-1)=\ln\left(\frac{99}{k-1}\right)$$

بهذا التقريب نجد أن الاحتمال $(*)$ للحصول على ورقة مكتوباً عليها العدد الأكبر بعد عدم الأخذ بالأعداد المكتوبة على أول k ورقة ومن ثم النجاح باختيار العدد الأكبر على ورقة بعد ذلك هو:

$$.\ P\approx\frac{k}{100}\ln\left(\frac{99}{k-1}\right)$$

المطلوب الآن هو إيجاد k الذي يجعل هذا الاحتمال أكبر ما يمكن.

من الممكن استخدام حساب التفاضل والتكامل لإيجاد القيمة العظمى لهذه الدالة، لكننا نستخدم طريقة أخرى هنا لأن هذا الكتاب لا يفترض معرفة مسبقة لحساب التفاضل والتكامل. استخدم آلة حاسبة مزودة ببرنامج رسم أو استخدم برنامج حساب جبري لتخمين القيمة العظمى للدالة:

$$P(x) = \frac{x}{100}\ln\left(\frac{99}{x-1}\right)$$

وستجد أن القيمة العظمى تحدث عندما يكون:

$$x = \frac{100}{e} \text{ حيث } e \approx 2.718\ldots$$

هو عدد أويلر.

مما سبق نستنتج أن على أحمد سحب أول $\frac{100}{e}$ ورقة (تقريبًا أول 37 ورقة) وتذكر أكبر الأعداد المكتوبة على هذه الأوراق. ويكون العدد الذي يختاره هو أول عدد أكبر من هذا العدد الأكبر الذي سيظهر على ورقة لاحقة. هذه إستراتيجية أمثلة □

تمارين على الفصل الثالث

(١) أثبت أن عدد الطرق المختلفة لتوزيع n من أوراق اللعب المختلفة بين لاعِبَيْن هو $2\ 2^{n-1} - 1$. [إرشاد: يجب الأخذ بعين الاعتبار إمكانية توزيع أعداد مختلفة من الأوراق لكل من اللاعبين على أن يأخذ كل منهما ورقة واحدة على الأقل].

(٢) اشتركت خمس سيدات بسرقة كمية من الألماس من أحد المحلات التجارية. بعد ذلك اجتمعن في غرفة الفندق لتقسيم الألماس المسروق بينهن بالتساوي. استغلت إحدى السيدات انشغال الأربع سيدات الأخريات وقامت بتوزيع أحجار الألماس إلى خمسة أقسام متساوية وبقي حجر واحد من الألماس. أعطت الحجر المتبقي لعاملة الفندق وخبأت حصتها ووضعت الحصص الأربع الأخرى في كوم واحد.

بعد ذلك قامت سيدة ثانية بتقسيم الكوم المتبقي إلى خمس حصص متساوية وبقي حجر واحد أعطته لعاملة الفندق وخبأت حصتها ووضعت ما تبقى في كوم واحد.

كررت كل من السيدات الثلاث الأخريات عملية تقسيم مماثلة وفي كل مرة يتبقى حجر واحد يُعطى لعاملة الفندق.

أخيرًا اجتمعت السيدات الخمس وقمن بتقسيم ما تبقى من الألماس بينهن بالتساوي وتبقى حجر واحد أعطينه لعاملة الفندق. ما أصغر عدد من أحجار الألماس الذي تمت سرقته في الأصل؟

(٣) الشكل رقم (١٢٠) يبين كيفية إنشاء نمط من الأعداد.

1

1 1 1

1 2 3 2 1

1 3 6 7 6 3 1

1 4 10 16 19 16 10 4 1

• • •

شكل رقم (١٢٠)

يتم إنشاء أعداد كل صف من الصفوف ابتداءً من الصف الثالث على النحو التالي:

(i) العدد الأول والأخير من كل صف يساوي 1.

(ii) العددان الثاني وما قبل الأخير من كل صف نحصل عليهما بجمع العددين الواقعين فوقهما مباشرة في الصف الأعلى.

(iii) نحصل على جميع أعداد الصف الأخرى بعد ذلك بجمع الأعداد الثلاثة الواقعة مباشرة فوق العدد من الصف الأعلى.

برر وجود عدد زوجي واحد على الأقل في كل من الصفوف ابتداءً من الصف الثالث.

(٤) فئات قطع النقد المعدنية في العملة الأمريكية هي فئة 50 سنتًا، فئة 25 سنتًا، فئة 10 سنتات، فئة 5 سنتات، فئة 1 سنت. والدولار يساوي 100 سنت. أخذ طفل صغير من والده ست قطع نقد معدنية تساوي قيمتها دولارًا واحدًا. أثناء ذهابه إلى البقالة سقطت إحدى القطع النقدية في مجرور المياه الصحية. ما احتمال أن تكون تلك القطعة من فئة العشرة سنتات؟

(٥) ما العدد المتوقع لأطفال زوج وزوجة بحيث تكون الأرجحية لصالح حصولهم على ولدين وبنت على الأقل؟

(٦) يحتاج العنكبوت إلى أكل ثلاث ذبابات يوميًا لكي يبقى على قيد الحياة. بعد أن يأكل ثلاث ذبابات في يوم واحد فإنه لن يأكل شيء بعد ذلك في هذا اليوم. احتمال أن يصطاد أي ذبابة تصادف طريقه يساوي $\frac{1}{2}$. إذا علمنا أن العنكبوت صادف اليوم خمس ذبابات (بعضها تم اصطياده وبعضها نجى) ما احتمال أن تنجو الذبابة التالية؟

(٧) مع كل علبة من بطاقات كرة القاعدة (البيسبول) يأخذ المشتري ورقة لعب من مجموعة أوراق اللعب (عددها 52) مجانًا. ما العدد المتوقع من علب بطاقات كرة القاعدة التي يتوجب شراءها للحصول على مجموعة كاملة من أوراق اللعب (52 ورقة)؟

(٨) بدر وتحسين يتقنان لعبة رمي السهم. كل منهما يستطيع إصابة الهدف باحتمال 50%. وقفا متقابلين يبعدان عن بعضهما البعض مسافة 20 قدمًا وتناوبا في رمي السهام على بعضهما البعض. الرابح هو من يصيب خصمه أولاً. إذا بدأ بدر برمي السهم الأول فما فرصة ربحه؟

(٩) أسقطنا ثلاث نقاط من الحبر عشوائيًّا على هدف يأخذ شكل القرص. ما احتمال أن تقع النقاط الثلاث جميعًا في أحد نصفي القرص؟

(١٠) أعد التمرين رقم (٩) باستبدال القرص بكرة ونصف القرص بنصف الكرة؟

(١١) أعد التمرين رقم (٩) باستبدال القرص بمربع ونصف القرص بنصف مربع. هل يؤثر إذا قسمنا المربع إلى نصفين أفقيًّا أو راسيًّا أو قطريًّا؟

(١٢) كتبنا الأعداد الصحيحة من 1 إلى 1000 على 1000 قطعة ورق ثم وضعناها داخل وعاء. سحبنا أربع أوراق من الوعاء عشوائيًّا واحدة بعد الأخرى. ما احتمال أن تكون الأعداد على الأوراق الأربع مرتبة تصاعديًّا؟

(١٣) ما التغيير الذي يحصل في التمرين رقم (١٢) إذا لا تزال لدينا 1000 ورقة مكتوب عليها 1000 عدد مختلف، لكن لا نفترض مقدمًا معرفتنا لهذه الأعداد أو لطريقة ترتيبها؟

(١٤) وضعنا 5 بليات حمراء و 4 بليات زرقاء في كيس. سحبنا 5 بليات عشوائيًّا من الكيس. ما احتمال أن تكون جميعها بليات حمراء؟

(١٥) نريد الحصول على جالون ماء ولكننا نملك فقط وعائين سعة أحدهما 8 جالونات وسعة الثاني 5 جالونات. كيف يمكن الحصول على جالون الماء باستخدام هذين الوعائين فقط؟

(١٦) بدأنا بكتابة الأعداد الصحيحة الموجبة بالتتالي سطر واحد من اليسار إلى اليمين لتكوين عدد كبير. إذا بدأنا بالعدد 1 فما المرتبة (الخانة) الـ 50000 التي نحصل عليها؟

(١٧) رقمنا كتاب عدد صفحاته 750 ترقيمًا اعتياديًّا. كم عدد المراتب (الخانات) التي نحتاجها لإنجاز ذلك؟

(١٨) لنفرض أن s أحد أضلاع مثلث T. ما احتمال أن يكون طول s أصغر من المتوسط الحسابي لطولي الضلعين الآخرين؟

(١٩) لدينا 40 طالبًا، جلس كل منهم لأداء ثلاثة اختبارات في الجبر والأحياء والكيمياء. جمعنا البيانات التالية:

- 12 طالبًا رسبوا في اختبار الجبر.
- 5 طلاب رسبوا في اختبار الأحياء.
- 8 طلاب رسبوا في اختبار الكيمياء.
- طالبان رسبا في اختباري الجبر والأحياء.
- 6 طلاب رسبوا في اختباري الجبر والكيمياء.
- 3 طلاب رسبوا في اختباري الأحياء والكيمياء.

- طالب واحد رسب في الاختبارات الثلاثة.

[ملحوظة: يمكن قراءة هذه البيانات على النحو التالي: خمسة طلاب رسبوا في الأحياء منهم اثنان رسبا في اختباري الجبر والأحياء وهكذا!].

كم عدد الطلاب الذين اجتازوا الاختبارات الثلاثة.

(٢٠) ألقيت حجري نرد غير متحيزين وأنت مغمض العينين. بعد رمية معينة أخبرك صديقك أن مجموع العددين الظاهرين على الحجرين هو على الأقل 9.

ما احتمال أن يكون مجموع العددين في الحقيقة 11؟

ما احتمال أن يكون مجموع العددين هو على الأقل 11؟

(٢١) يمكن إيجاد مقالاً في أدبيات علم الاجتماع يدعي التالي: "غالبية المحكوم عليهم بارتكاب جرائم في الولايات المتحدة الأمريكية هم من عائلات عدد أفرادها أكبر من المتوسط". استطرد المقال ليتوصل إلى ضرورة تدخل الهندسة الاجتماعية لدراسة الربط بين ارتكاب الجرائم وعدد أفراد العائلة. هل هذا ارتباط معقول؟ هل من الممكن فعلاً أن معظم الأفراد هم من عائلات عددها أكبر من المتوسط؟ ضع نموذج إحصائي لتحدد فيما إذا كان هذا الادعاء صحيحاً. قم بإجراء بعض التجارب.

(٢٢) اشترك خمسة رجال وخمس سيدات في أحد النوادي الاجتماعية. في نهاية العام الأول، يقوم كل من الرجال بترتيب السيدات من حيث الصفات التي يفضلها في زوجة المستقبل. وبالمثل، تقوم كل من السيدات بترتيب الرجال من حيث الصفات المفضلة لديها بزوج المستقبل. هل دائماً سينتج عن هذه البيانات خمسة عقود قران بحيث يكون كل واحد من بين الرجال والسيدات مقتنعاً باختياره؟ [هنا "مقتنع" تعني إذا تزوج الرجل x من السيدة y فإنه لا توجد أي من السيدات الأربع الباقية تحقق الخاصية، إذا تزوج x منها عوضاً عن التي اختارها فإنه

سيتزوج من سيدة أفضل من السيدة y وبالمثل السيدة y، وبهذا فإنه يجب إعادة النظر في الخيارات الأخرى].

(٢٣) لديك k من أكواب الماء الصافي. هذه الأكواب تقابل عناصر مجموعة S عدد عناصرها k. ضع حبة عنب في أحد الأكواب. الآن، ضع حبة عنب أخرى في كوب آخر. كرر ذلك أي عدد من المرات ثم توقف [عند توقفك، كل من الأكواب يحتوي على حبة عنب واحدة على الأكثر وبعضها لا يحتوي حبة عنب]. وبهذا تكون قد اخترت مجموعة جزئية من S. استخدم هذه الخطة لإيجاد عدد المجموعات الجزئية من S. وبهذا تكون قد قدمت برهانًا آخر بأن هذا العدد يساوي 2^k.

(٢٤) طرقت باب أحد أصدقائي القدامى الذين لم أجتمع بهم من سنوات عديدة. فتحت ابنتهم مريم الباب وقالت: "نحن سعداء بقدومك. سأذهب إلى الغرفة الخلفية وأنادي توأمي". ما احتمال أن يكون التوأم ولدًا؟

(٢٥) لدينا ثلاثة كروت متطابقة في الشكل والملمس. لون الكرت الأول أحمر من الجهتين والثاني أسود من الجهتين والثالث لونه أحمر من جهة وأسود من الجهة الأخرى. وضعنا الكروت الثلاثة في وعاء وسحبنا كرتًا واحدًا، ونظرنا إلى جهة واحدة فقط من هذا الكرت ووجدنا أن لونها أحمر. ما احتمال أن يكون لون الجهة الأخرى من هذا الكرت أحمر أيضًا؟

(٢٦) ألقينا حجر نرد ست مرات. ما احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 5 في خمس رميات على الأقل؟

(٢٧) ما عدد القواسم الموجبة المختلفة للعدد $30^4 = 810000$؟

(٢٨) جزئ المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ إلى مجموعتين جزائيتين منفصلتين اتحادهما S. عندئذ، إحدى هاتين المجموعتين تحتوي على عددين والفرق بينهما. لماذا؟

(٢٩) استخدمنا في ترقيم كتاب كبير 1890 مرتبة (خانة). كم عدد صفحات هذا الكتاب؟

(٣٠) ادرس المعادلات التالية:

$$1 = 1$$
$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$
$$10 + 11 + 12 + \cdots + 16 = 27 + 64$$

جد صيغة عامة. وأثبت صوابها.

(٣١) ادرس المعادلات التالية:

$$1 = 1$$
$$1 - 4 = -(1 + 2)$$
$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$
$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

جد صيغة عامة وأثبت صوابها.

(٣٢) يمتلك جمال 44 قطعة نقود معدنية من فئة العشرة سنتات وعدد جيوب ملابسه يساوي 10. هل يستطيع جمال توزيع قطع النقود على الجيوب العشرة بحيث لا يضع عددين متساويين من القطع في جيبين مختلفين؟

(٣٣) ادرس المعادلات التالية:

$$1 = 1$$
$$3 + 5 = 8$$
$$7 + 9 + 11 = 27$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$
$$21 + 23 + \cdots + 29 = 126$$

جد صيغة عامة وأثبت صوابها.

(٣٤) توجد 50 طريقة مختلفة للحصول على 50 سنتًا باستخدام قطع النقد

المعدنية الأمريكية (انظر: التمرين رقم ٤). أثبت ذلك. بكم طريقة مختلفة يمكن الحصول على 25 سنتًا؟

(٣٥) عند مدخل إحدى المدن الأمريكية الكبيرة كتبت اللوحة الإرشادية:

TOLEDO
OHIO

بحيث كانت كل من الحروف ملصقة على لوح خشبي منفصل، لكن الألواح الخشبية جميعها متطابقة. هبت عاصفة شديدة وأسقطت جميع الألواح الخشبية أرضًا. بعد هدوء العاصفة مرَّ رجل أمي (لا يقرأ ولا يكتب) ولاحظ سقوط اللوحة الإرشادية وأراد إعادتها إلى مكانها. فأعادها عشوائيًّا (لأنه لا يعرف قراءة الحروف). ما احتمال أن يكون قد أعاد كلمة "OHIO" صوابًا إلى مكانها. ما احتمال أن يكون قد أعاد كلمة "TOLEDO" صوابًا إلى مكانها؟ ما احتمال أن يكون قد أعاد الكلمتين صوابًا إلى مكانيهما؟ [لاحظ أن الحروف I، H، O تقرأ بالطريقة نفسها سواء أعادها مقلوبة أم لا].

(٣٦) قسمنا مستطيلاً طوله m وعرضه n إلى mn من المربعات الصغيرة طول ضلع كل منها 1. ما عدد الممرات الممكنة التي يمكن إتباعها للوصول من الركن السفلي الأيسر إلى الركن العلوي الأيمن بحيث يكون اتجاه الحركة المسموح به إلى الأعلى وإلى اليمين فقط؟

(٣٧) لعبت ثلاث فرق 11 مباراة دورية فيما بينها. شروط المباريات على النحو التالي: يلعب فريق نيويورك المباراة الأولى مع فريق آخر. بعد ذلك، يلعب الخاسر في مباراة، المباراة التالية مع فريق آخر. ربحت الفرق الثلاث أعدادًا مختلفة من المباريات. خسر فريق نيويورك المباراة الأخيرة. ما عدد المباريات التي فازت بها والتي خسرتها كل من الفرق الثلاث؟

(٣٨) أردنا تجليس 5 سيدات مع أطفالهن الخمسة على مائدة مستديرة (لكل سيدة

طفل واحد فقط). كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك بحيث لا يسمح لسيدة وابنها أن يجلسا متجاورين؟ [إرشاد: جرب أولاً تجليس سيدتين أو ثلاثة سيدات مع أطفالهن].

(٣٩) يقال إن بداية نظرية الاحتمالات كانت عام 1654 على يد العالم الرياضي المشهور بليز باسكال (Blaise Pascal) عندما كتب إليه صديقه تشيفالير دي ميري (Chevalier de Me're') يسأله عن سبب خسارته المستمرة في لعبة إلقاء حجري النرد حيث كانت شروط اللعبة على النحو التالي:
يتم إلقاء حجري نرد أربع وعشرين مرة متتالية. إذا كان مجموع العددين الظاهرين في أي من هذه الرميات يساوي 12 فإنه يكسب عددًا معينًا من الفرنكات وإلا فإنه يخسر العدد نفسه من الفرنكات. بعد ذلك قام باسكال بتحليل ذلك وشرح لصديقه سبب خسارته المستمرة.

(٤٠) ما الحدث الأرجح وقوعه: الحصول على العدد 6 مرة واحدة على الأقل عند إلقاء حجر نرد واحد أربع مرات أو الحصول على مجموع 12 مرة واحدة على الأقل عند إلقاء حجري نرد أربع وعشرون مرة؟

(٤١) يلعب خمس أشخاص اللعبة التالية: يقوم كل منهم برمي قطعة نقود بنفس الوقت. إذا كانت جميع الرميات ما عدا واحدة فقط متشابهة فإن صاحب الرمية المختلفة يكسب (مثلاً: إذا كانت النتيجة 4 صور وكتابة واحدة فإن الكتابة تكسب). إذا كانت نتيجة الرميات مختلفة عن ذلك فإنهم يقومون برمي القطع مرة أخرى. ما احتمال أن يكون هناك رابح من أول مرة؟ من ثاني مرة؟

(٤٢) وعاء يحتوي على كرة بيضاء وكرتين حمراوين وثلاث كرات خضراء وأربع كرات زرقاء وخمس كرات سوداء وست كرات صفراء وسبع كرات برتقالية وثمان كرات بنفسجية. سحب أحد أصدقائك كرة عشوائيًّا ولم يصرح لك

عن لونها. يسمح لك بطرح عدد من الأسئلة على صديقك تكون الإجابة عن كل منها "نعم" أو "لا" لتعرّف لون الكرة المسحوبة. ما إستراتيجيتك المثلى؟

(٤٣) متتالية $_{j=0}^{\infty}\; a_j$ معرفة على النحو التالي:

$a_0 = 2$ ، $a_1 = 1$ ، $a_j = 3a_{j-1} - a_{j-2}$ لكل $j \geq 2$

استخدم طريقة الدوال المولِّدة لإيجاد صيغة مغلقة للحد a_j.

(٤٤) متتالية $_{j=0}^{\infty}\; a_j$ معرفة على النحو التالي:

$a_0 = 4$ ، $a_1 = -1$ ، $a_j = -a_{j-1} + 2a_{j-2}$ لكل $j \geq 2$.

استخدم طريقة الدوال المولِّدة لإيجاد صيغة مغلقة للحد a_j.

(٤٥) متتالية $_{j=0}^{\infty}\; a_j$ معرفة على النحو التالي:

$a_0 = 0$ ، $a_1 = -1$ ، $a_j = 3a_{j-1} - 2a_{j-2}$ لكل $j \geq 2$.

استخدم طريقة الدوال المولِّدة لإيجاد صيغة مغلقة للحد a_j.

(٤٦) قسم مجموعة ورق لعب (عددها 52) إلى خمسة أكوام. ما احتمال أن يكون أحد الأوراق العلوية من الخمسة أكوام هي صورة حمراء (الصور هي: ملك أو ملكة أو شاب)؟

(٤٧) ما إجابة التمرين رقم (٤٦) إذا كان عدد الأكوام يساوي k؟

(٤٨) وزعنا 100 كرة بيضاء و 100 كرة سوداء على ثلاثة أكياس. أغمض عينيك ثم اختر أحد الأكياس واسحب كرة من هذا الكيس. هل يعتمد احتمال اختيارك لكرة بيضاء على كيفية توزيع الكرات على الأكياس بداية؟

(٤٩) طبيب بيطري متخصص في الكشف عن أحد أمراض الفم والحافر لدى البقر. ولإنجاز ذلك رأى أن الطريقة المناسبة هي تقسيم القطيع إلى مجموعات عدد كل منها 100. تدل الإحصاءات على أن بقرة من بين 500 بقرة مصابة بالمرض (إذا تمَّ اكتشاف المرض مبكرًا وإلا فإن القطيع جميعه سيصاب

بالمرض) الاختبار الذي يستخدمه الطبيب هو فحص الدم. ولغرض زيادة فعالية الاختبار وتوفير التكاليف قرر الطبيب أخذ عينة صغيرة من الدم من كل بقرة من المجموعة التي عددها 100 وخلط هذه العينات مع بعضها البعض وفحص الخليط. إذا حصل على نتيجة سلبية فإنه سيعلن أن المجموعة المكونة من 100 بقرة خالية من المرض، أما إذا كانت النتيجة إيجابية فإن عليه فحص كل من العينات المائة، وفي هذه الحالة يكون قد أجرى الفحص 101 مرة. ما عدد الاختبارات المتوقع إجراءها على عدد من الأبقار يساوي 5000 إذا اتبع الطبيب طريقة الفحص هذه؟

(٥٠) يحتوي خزان على 5 جالونات من الماء النقي وكوب واحد ($\frac{1}{16}$ من الجالون) من الصبغة الحمراء. مزجنا السائلين جيداً. بعد ذلك أخذنا كوباً من المزيج وأضفنا إلى المزيج كوباً من الماء النقي. قمنا بعد ذلك بمزج السائل جيداً وأخذنا كوباً من المزيج الجديد وأضفنا بدلاً منه كوباً من الماء النقي. وبالاستمرار على هذا المنوال يصبح تركيز الصبغة أقل فأقل (لماذا ؟). هل تؤول الصبغة إلى الصفر إذا كررنا الخطوات عدداً كافياً من المرات (ولكن العدد منته)؟ هل يصل تركيز الصبغة إلى أقل من 1% ؟ هل يصل التركيز إلى أقل من 0.1% ؟ هل يوجد حد أدنى لنسبة تركيز الصبغة؟

(٥١) لدينا كرت طوله 5 بوصات وعرضه 3 بوصات. اكتب الأعداد من 1 إلى 4 على الجهة الأمامية للكرت وبصف واحد وبمسافات متساوية بينها وحاول كتابتها بحيث تكون أحجامها متساوية. وعلى الجهة الخلفية للكرت اكتب "لماذا اخترت العدد 3"؟
الآن، دع صديقك ينظر إلى الجهة الأمامية للكرت ثم قل له أن يختار عدداً. ستتعجب من أن الأشخاص غالباً ما يختارون العدد 3 . في هذه اللحظة اقلب

الكرت وفاجئ صديقك. ما السبب وراء ذلك؟ أيضًا، إذا كتبت الأعداد من 1 إلى 10 فإن الأشخاص غالبًا ما يختارون العدد 3 أو العدد 7 (أكبر من الاحتمال المجرد لهذا الاختيار). برأيك، ما السبب وراء ذلك؟

(٥٢) تختلف أحجام معدة الأشخاص وتتراوح من 15 إلى 1 من المعدة الأكبر إلى المعدة الأصغر وتختلف أحجام القلب من 2 إلى 1 ويختلف معدل ضخ الدم من 3 إلى 1. نقول أن صحة الشخص "متوسطة" إذا كانت كل من هذه الصفات عنده تقع في الثلث الأوسط. إذا افترضنا أن هذه الصفات موزعة عشوائيًّا بين الناس فما نسبة السكان المتوسطين بالنسبة لهذه الصفات الثلاث؟

(٥٣) يمكن وصف لعبة البوكر على النحو التالي: يتم توزيع خمس أوراق لعب على كل من اللاعبين (لاعبين أو أكثر). تكون لدى اللاعب فرصة للفوز إذا كان من بين أوراقه الخمسة "زوج" (زوج يعني ورقتين كل منهما 7 أو كل منهما ملك وهكذا). نفرض لغرض السهولة أن عدد اللاعبين يساوي 2، أنت ولاعب آخر. إذا كان لديك زوج فما احتمال حصول اللاعب الآخر على زوج (أي هل احتمال حصوله على زوج أكبر أم أصغر من احتمال حصولك على زوج)؟

(٥٤) لدينا وعاء من الخرز. جميع الخرزات متطابقة في الحجم والشكل، لكنها تأتي بلونين. تريد تكوين قلادة مكونة من 10 خرزات. ما عدد القلائد المختلفة التي يمكن تكوينها من الخرزات العشر؟ لاحظ أن قلادة تكافئ قلادة أخرى إذا حصلت على إحداهما بتدوير الأخرى. القلادتان المتكافئتان تعتبران قلادة واحدة.[بعد حل هذا التمرين، استبدل "10" بالعدد "n" و"2" بالعدد "k" ثم أعد حلّ التمرين].

(٥٥) يحتوي أحد الأدراج على زوج من القفازات الخضراء وزوج من القفازات البني. أغمضت عينيك وتناولت زوجًا من القفازات عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون الزوج من اللون نفسه؟

الفصل الرابع

مسائل في المنطق
Problems of Logic

(١,٤) منطق صريح
Straight Logic

مسائل هذا البند لا تستخدم الرياضيات ويتمّ حلها باستخدام المنطق والتبرير فقط.

مسألة (١,١,٤)

التقى 6 أشخاص هم A، B، C، D، E، F في عربة طعام أحد القطارات. هؤلاء الأشخاص الستة يسكنون في ست مدن مختلفة هي نيويورك، شيكاغو، تولسا، سانت لويس، ميلواكي، أتلانتا. المعلومات المتوافرة عن هؤلاء الأشخاص:

(١) A والرجل من مدينة نيويورك طبيبان.

(٢) E والسيدة من شيكاغو مدرسان.

(٣) الشخص من تولسا و C مهندسان.

(٤) شارك كل من B و F في حرب الخليج ولكن الشخص من تولسا لم يخدم في الجيش.

(٥) الشخص من ميلواكي أكبر من A.

(٦) الشخص من أتلانتا أكبر من C.

(٧) سيغادر B والرجل من مدينة نيويورك القطار عند محطة سانت لويس.

(٨) سيغادر C والرجل من ميلواكي القطار عند محطة سان فرانسيسكو.

قابل بين الأشخاص ووظائفهم ومدنهم.

الحل:

لا يجب علينا الاستهانة من أهمية جدولة المعلومات لأن ذلك سينظم لنا البيانات بطريقة تساعدنا على الوصول إلى الحل. وبهذا نقوم بعمل الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F
مدينة نيويورك	x	x	x		x	
شيكاغو	x		x		x	
تولسا	x	x	x		x	x
سانت لويس						
ميلواكي	x	x	x			
أتلانتا			x			

العلامة x تعني أن التقابل مستحيل.

فمثلاً، العبارة (١) تضمن لنا أن الرجل A لا يسكن مدينة نيويورك، لذا وضعنا x في موقع صف مدينة نيويورك وعمود A. وبالمثل، العبارة (٧) تضمن لنا أن B ليس من نيويورك. العبارتان (١) و (٢) معاً تضمنان لنا أن الطبيب A لا يمكن أن يكون من شيكاغو (لأن مَنْ يسكنا شيكاغو هما مدرسان). وبالأسلوب نفسه نحصل على بقية العلامات x.

بعد أن أدخلنا جميع العلامات x نجد أن C لا يمكن أن يكون إلا من سانت لويس. لذا فإن المدينة الوحيدة التي يمكن أن يكون منها A هي أتلانتا. بمجرد التأكد من أن الشخص C يسكن سانت لويس فإنه يكون من المستحيل على الأشخاص الخمسة الباقين أن يكونوا من سانت لويس، ولهذا نضع العلامة # في صف سانت لويس وأعمدتهم. وبالمثل، نضع # في صف أتلانتا وأعمدة كل من B، D، E، F. أما العلامة * فنضعها لتدل على تقابل المدينة مع الشخص المناسب:

	A	B	C	D	E	F
مدينة نيويورك	x	x	x		x	
شيكاغو	x		x		x	
تولسا	x	x	x		x	x
سانت لويس	#	#	*	#	#	#
ميلواكي	x	x	x			
أتلانتا	*	#	x	#	#	#

من هذا الجدول يكون من الواضح أن B من شيكاغو، E من ميلواكي، F من نيويورك، D من تولسا.

وأخيرًا، فإن العبارات (١) و (٢) و (٣) تقابل بين الأشخاص (أو المدن) ووظائفهم ونحصل على:

- A طبيب من أتلانتا.
- B مدرس من شيكاغو.
- C مهندس من سانت لويس.
- D مهندس من تولسا.
- E مدرس من ميلواكي.
- F طبيب من مدينة نيويورك.

وبهذا ينتهي حل المسألة. □

مسألة تحدي (٤، ١، ٢)

هل احتجنا إلى استخدام العبارات الثماني جميعها لحل المسألة السابقة؟

مسألة (٤، ١، ٣)

ما أكبر كمية من قطع النقود من فئات السنت، 5 سنتات، 10 سنتات، 25 سنتًا التي يمكن أن تكون بحوزتك ومع ذلك لا يمكنك تكوين دولار منها؟

الحل:

نستخدم طريقة الحذف. من الواضح أنه لا يمكن أن يكون معك أكثر من

3 قطع من فئة 25 سنتًا ولا أكثر من 9 قطع من فئة 10 سنت ولا أكثر من 19 قطعة من فئة 5 سنتات ولا أكثر من 99 قطعة من فئة 1 سنت. لكن عند استخدامك أكثر من فئة لتكوين دولار فإن المسألة أعقد من ذلك.

من الوضح إمكانية الحصول على 99 سنتًا بعدد من الطرق. المسألة الآن هو محاولة إثبات إمكانية الحصول على مبلغ أكبر من دولار مع استحالة إمكانية الحصول على دولار. إن هذا ممكن فقط إذا استطعنا إيجاد مجموعة جزئية من قطع النقود قيمتها أقل من دولار، لكن بإضافة أي قطعة أخرى إلى هذه المجموعة الجزئية تصبح قيمة نقودها أكبر من دولار. على سبيل المثال، يمكن أن يكون لديك قطعة واحدة من فئة 25 سنتًا و 9 قطع من فئة 10 سنتات. قيمة هذه القطع هي 1.15. الآن، إذا أخذنا منها 7 قطع من فئة 10 سنتات وقطعة 25 سنتًا نحصل على 0.95. إذا أخذنا منها 9 قطع من فئة 10 سنتات نحصل على 0.90. إذ ا أخذنا منها 8 قطع من فئة 10 سنتات وقطعة 25 سنتًا نحصل على 1.05.

هل يمكن الحصول على وضع أفضل من المثال السابق؟ من الواضح أن المثال يبين ضرورة أن يكون عدد قطع فئات 25 سنتًا فرديًا، ومن ثم وجود قطع من فئة 10 سنتات لا يمكننا من الحصول على دولار (ولكن وجود قطع من فئات 5 سنتات وسنت واحد تمكننا من ذلك). من الواضح استحالة استخدام 10 قطع من فئة 10 سنتات وقطعة من فئة 25 سنتًا لأن 10 قطع من فئة 10 سنتات تساوي دولاراً. إضافة قطع من فئة 5 سنتات يجعل الوضع أسوأ لأن وجود مثل هذه القطع مع قطع من فئة 25 سنتًا يمكننا من الحصول على دولار. ولكن من الممكن إضافة أربع قطع من فئة 1 سنت ويكون:

مجموع 9 قطع من فئة 10 سنتات وقطعة من فئة 25 سنتًا و 4 قطع من فئة 1 سنت يساوي 1.19 دولار، وبهذا يستحيل الحصول على دولار من هذه القطع [لاحظ استحالة استخدام 5 قطع من فئة 1 سنت لأن ذلك يمكننا من الحصول على دولار].

طريقة أخرى هو استخدام ثلاث قطع من فئة 25 سنتًا وأربع قطع من فئة 10 سنتات (استخدام خمس قطع من فئة 10 سنتات يمكننا من الحصول على دولار) وأربع قطع من فئة 1 سنت. ويكون هذا المجموع يساوي 1.19 دولارًا. وبقليل من التمعن نجد أن هذا هو العدد الأكبر. □

مسألة تحدي(٤، ١، ٤)

أعد حل المسألة السابقة باستبدال "دولار" بـ"خمسين سنتًا" ماذا عن "خمسة وسبعين سنتًا"؟

مسألة (٤، ١، ٥)

يقف ثلاثة رجال على دائرة وعيونهم مغلقة. وضعنا طاقية على رأس كل منهم. لون كل طاقية إما أحمر أو أسود وهذه المعلومة يعرفها الرجال. بعد ذلك يقوم الرجال بفتح عيونهم في اللحظة نفسها. والرجل الذي يرى طاقية حمراء يرفع يده. أول رجل يعرف لون الطاقية التي على رأسه يكون هو الرابح. ما الذي يحصل إذا كانت اثنتان من الطواقي حمراوين والثالثة سوداء؟

الحل:

هذه مسألة سهلة: لنفرض أن الرجال هم A، B، C. ولنفرض أن الطاقية على رأس C هي السوداء. بما أن الطاقيتين الأخريين حمراوان فإن الرجال الثلاثة سيرفعون أيديهم. الآن، الرجل A سيرى أن الطاقية على رأس الرجل C سوداء. وسيبرر استحالة أن يكون لون الطاقية التي على رأسه سوداء:

لأنها لو كانت سوداء فإن B لا يرفع يده. ومن ثم يستنتج A أن طاقيته حمراء. وبالمثل، يبرر B أن طاقيته حمراء بصورة مشابهة.

إذن، يكسب A أو B (الأسرع في رفع يده). الرجل C حتمًا سيكون الخاسر لأنه سيرى لون طاقية كل من A و B وهي حمراء وأن كل منهما رافع يده ومن ثم فهو يستنتج إمكانية أن يكون لون طاقيته حمراء أو سوداء ولا يستطيع تحديد اللون. □

مسألة (٤, ١, ٦)

أعد حلّ المسألة السابقة إذا كان لون الطاقية التي على رأس كل منهم حمراء؟

الحل:

لنفرض أن الرجال هم A، B، C. من الواضح أن الرجال الثلاثة سيرفعون أيديهم لأن كل منهم سيرى طاقية حمراء (في الحقيقة هما طاقيتان حمراوان). لنفرض أن A كان الأسرع في رفع يده. سيقول A أن طاقيته حمراء لأنها لو كانت سوداء فإن B سيعلم أن الطاقية التي رأسه لا يمكن أن تكون سوداء لأنها لو كانت سوداء فإن C لا يمكن أن يكون رافعًا يده. إذن، لو كانت طاقية A سوداء لاستطاع B أن يستنتج أن لون الطاقية التي على رأسه لابد من أن تكون حمراء. وبالمثل، سيكون تبرير C. بما أن A كان أسرع من B و C برفع يده فإنه يستنتج أن طاقيته حمراء ويكسب. □

مسألة تحدي(٤, ١, ٧)

أعد حلّ المسألة السابقة إذا كان عدد الرجال أربعة وكل من الطواقي التي على رؤوسهم حمراء [إرشاد: ما العلاقة بين هذه المسألة والمسألة (٤,٥,١)؟]

مسألة (٤, ١, ٨)

اشترى سائحان نسختين من التمثال نفسه (السائحان لا يعرفان بعضهما البعض). وضع كل منهما تمثاله في كرتون منفصل وتمَّ شحنهما على رحلة الطيران نفسها. أضاعت شركة الطيران كلا التمثالين. قدم كل منهما طلبًا للشركة للتعويض عن تمثاله ولم يكن لدى أي منهما فاتورة شراء تبين ثمن التمثال. ولهذا وضع كل منهما ثمنًا تقديريًّا لتمثاله (لم يتفقا على مبلغ لأنهما لا يعرفان بعضهما البعض). قام الموظف المسؤول في شركة الطيران بتبليغ كل من السائحين أنه يتوقع وصول طلب كل منهما وسيتم تقسيمه على النحو التالي:

(i) مبلغ التعويض يجب ألا تحتوي على كسور من الدولارات ويجب أن تكون القيمة من 5 دولارات إلى 200 دولار.

(ii) الشخص الذي يطلب المبلغ الأقل سأعتبره صادقًا وستدفع له الشركة المبلغ الذي طلبه مضافًا إليه 3 دولارات مكافأة على أمانته.

(iii) الشخص الذي يطلب المبلغ الأكبر سأعتبره كاذبًا وستدفع له الشركة المبلغ الذي طلبه الشخص الآخر مخصومًا منه مبلغ 3 دولارات عقابًا له على عدم أمانته.

في حالة أن يكون المبلغان متساويين يعامل الشخصان كما في الحالة (iii).

على افتراض أن المسافرين يتمتعان بالذكاء نفسه، ما الإستراتيجية المثلى التي يتبناها كل منهما؟

الحل:

من الواضح أن كلاً من المسافرين يريد الحصول على أكبر مبلغ ممكن. نرمز للمسافرين بالرمزين A و B. إذا طلب كل منهما مبلغ 200 دولار فإن كلاً منهما سيحصل على 197 دولارًا. كلاهما يعرف ذلك. وبمعرفة ذلك قرر المسافر A أن من صالحه طلب 199 دولارًا. وباستخدام B الأسلوب نفسه وتوقعه أن يستخدم A هذا الأسلوب فإنه قرر أن يطلب مبلغ 198 دولارًا.

ولكن المسافر A سيفكر بالأسلوب الذي فكر فيه المسافر B في الفقرة السابقة وأنه يتوقع أن يكون B قد فكر بالطريقة نفسها فإنه سيطلب مبلغ 197 دولارًا. وباستخدام الاستقراء الإرجاعي نجد أن كلاً من المسافرين سيطلب مبلغ 5 دولارات ومن ثم سيحصل على دولارين. □

يحتوي التحليل المستخدم لحلِّ المسألة السابقة على بعض المشكلات وهو مثال على وضع يحدث غالبًا في نظرية الألعاب، حيث يستخدم كلا اللاعبين تبريرًا

صحيحًا تكون نتيجته غير مرضية. إن ما يحدث هنا ما هو إلا وجهة نظر: إذا استطاع كل من اللاعبين معرفة ما يدور بذهن اللاعب الآخر وإذا تواصل اللاعبان مع بعضهما البعض فإن النتيجة ستكون أفضل من ذلك. وبما أن كلاً من اللاعبين يحاول خداع الآخر فإنهما يتبنيان إستراتيجية ستقودهما إلى خسارة. للاطلاع على المزيد من التفاصيل على هذا النمط من المسائل انظر: [MON] واقرأ معضلة السجين (prisoner's dilemma) (انظر: أيضًا التمرين رقم (١٨) من تمارين الفصل السابع).

مسألة تحدي (٤، ١، ٩)

حاول إيجاد تبرير مختلف لإيجاد حل للمسألة السابقة تكون نتيجته مرضية لأحد اللاعبين على الأقل؟

مسألة تحدي (٤، ١، ١٠)

تجرى اللعبة التالية بين لاعبين. يوضع بينهما كوم من السنتات عددها 50 سنتًا. يتناوب اللاعبان الأدوار. الخطوة الواحدة هي أخذ اللاعب سنتًا واحدًا أو سنتين من الكوم. تنتهي اللعبة عندما يتم استنفاد جميع السنتات أو أن يأخذ أحد اللاعبين سنتين مرة واحدة (أي إذا أخذ لاعب سنتًا واحدًا فاللعبة مستمرة وما عدا ذلك تتوقف اللعبة).

ما الإستراتيجية المثلى التي يتبناها اللاعب الأول للحصول على أكبر عدد من السنتات؟

البند التالي يقدم تفاصيل أكثر عن موضوع الألعاب.

(٤، ٢) الألعاب
Games

نتناقش في هذا البند عدد من مسائل الألعاب وشبيهة الألعاب. اكتسبت مؤخرًا نظرية الألعاب دورًا مهمًا في التفكير التحليلي الحديث. تعدُّ الدراسات التي

قدمها فون نيومان ومورغنسترن (Van Neumann and Morgenstern) في كتابهما [MON] من أوائل الدراسات التي ألقت الضوء على أهمية نظرية الألعاب. لن نقدم هنا تطبيقات على نظرية الألعاب ونركز فقط على الألعاب نفسها.

مسألة (٤، ٢، ١)

هذه اللعبة بين لاعبين. تبدأ بوضع فيشات متماثلة عددها 30. خطوة اللاعب هي أخذ عدد من 1 إلى 6 من هذه الفيشات. اللاعب الذي يأخذ الفيشة الأخيرة هو الرابح. ما إستراتيجية اللاعب الأول التي تضمن له الربح دائمًا؟

الحل:

لنفرض أن اللاعب الأول هو A وأن اللاعب الثاني هو B. نصمم إستراتيجية تضمن ربح اللاعب A. فكرة الإستراتيجية هي العمل إرجاعيًّا (أي البدء من الآخر). من الواضح أن A يرغب في أن تكون خطوته الأخيرة عندما يكون عدد الفيشات المتبقية لا يزيد على 6. وبهذا يأخذها جميعًا ويضمن أن يكون هو الرابح. بهذا سيواجه اللاعب B في خطوته الأخيرة (الخطوة التي تسبق خطوة A الأخيرة) عددًا من الفيشات بحيث عند أخذه أي عدد منها يتبقى عدد لا يزيد على 6. عندئذ، يأخذها A ويربح.

إذا كان عدد الفيشات قبل أن يلعب B خطوته الأخيرة هو 8 على سبيل المثال فإنه سيأخذ فيشة واحدة ويبقي أمام اللاعب A 7 فيشات فهذا وضع ليس في صالح A لأنه لا يستطيع أخذها جميعًا مرة واحدة. والوضع يكون مشابهًا لو بقيت فيشات عددها أكبر من أو يساوي 9 أمام B. لذا فالإستراتيجية التي تضمن فوز A في اللعبة هو أن يتبقى أمام B سبع فيشات قبل أن يلعب خطوته الأخيرة. لاحظ أن على B أخذ فيشة واحدة على الأقل و 6 فيشات على الأكثر وبهذا يبقى أمام A عدد من الفيشات لا يزيد على 6 يتناولها ويفوز.

باستخدام هذا التبرير الإرجاعي واستخدام المنطق نفسه نجد أن في الخطوة الرابعة قبل الأخيرة يرغب A في أن يبقي للاعب B، 14 فيشة. عندئذ، بغض النظر عن عدد الفيشات التي سيأخذها B (1 إلى 6)، يكون بإمكان A أخذ متمم هذا العدد (بالنسبة للعدد 7) في الخطوة الثالثة قبل الأخيرة ويبقى للاعب B، 7 فيشات. وبهذا يحصل A على إستراتيجيته الرابحة [على سبيل المثال، إذا أخذ B ثلاث فيشات من 14 فيشة فإن A سيأخذ أربع فيشات].

بتكرار هذه الإستراتيجية نجد أنه في الخطوة السادسة قبل الأخيرة يرغب A أن يبقي للاعب B، 21 فيشة. وفي الخطوة الثامنة قبل الأخيرة يرغب A أن يبقي للاعب B، 28 فيشة.

بهذا نكون قد وجدنا الإستراتيجية الرابحة للاعب A : خطوة A الأولى هي أخذ فيشتين وإبقاء 28 فيشة للاعب B . الآن، مهما كان عدد الفيش التي سيأخذها B (1 إلى 6) فإن A سيأخذ متمم هذه الفيش بالنسبة للعدد 7 في خطوته التالية. وبهذا يبقى أمام B، 21 فيشة. ومهما كان عدد الفيش التي سيأخذها B في هذه الخطوة فإن A سيأخذ متتم العدد ويبقى أمام B، 14 فيشة بعد ذلك، مهما كان العدد الذي سيأخذه B فإن A سيأخذ متتم هذا العدد ويبقى أمام B، 7 فيش. عندئذ، نكون قد وصلنا إلى الخطوة الأخيرة حيث مهما كان العدد الذي سيأخذه B في هذه الخطوة فإن بإمكان A أخذ ما تبقى من الفيشات ويفوز. □

مسألة تحدي (٤, ٢, ٢)

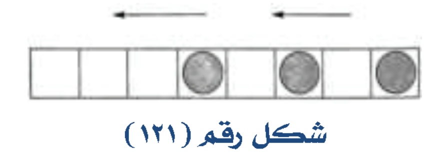
هل يمكنك تصميم إستراتيجية للمسألة السابقة تضمن فوز اللاعب الثاني؟

ماذا لو بقي اللاعب الأول متمسكًا بالإستراتيجية التي تبناها في حل المسألة السابقة؟

مسألة (٤, ٢, ٣)

تنفذ هذه اللعبة على قطعة مستطيلة مقسمة إلى 8 مربعات متجاورة كما

هو مبين في الشكل رقم (١٢١). قبل البدء في اللعب يكون وضع القطع الثلاث كما هو مبين في الشكل.



شكل رقم (١٢١)

الخطوة هي تحريك قطعة واحدة فقط إلى مربع مجاور باتجاه اليسار. يمكن تحريك القطعة من مربع عليه أكثر من قطعة. تنتهي اللعبة عند وضع القطع الثلاث في المربع أقصى اليسار. الفائز هو منْ يلعب الخطوة الأخيرة. ما الإستراتيجية التي تضمن فوز اللاعب الأول؟

الحل:

ليكن A هو اللاعب الأول و B هو اللاعب الثاني. ارسم الشكل على قطعة من الورق واستخدم ثلاث قطع نقود معدنية متماثلة. جرب أن تلعب عدد من المرات مع نفسك أو مع صديقك. ماذا تلاحظ؟ مهما حاولت فإن اللاعب A هو دائماً الفائز. ما السبب وراء ذلك؟

لاحظ أن القطع تتحرك فقط إلى الأمام (اليسار) ولا يمكن تحريكها إلى الخلف (اليمين). رقم القطع من اليسار إلى اليمين بالأرقام 1، 2، 3. الآن، لإنهاء اللعبة فإن القطعة 1 تتحرك ثلاثة مربعات والقطعة 2 تتحرك خمسة مربعات والقطعة 3 تتحرك سبعة مربعات. وبهذا يكون العدد الكلي للخطوات هو $3+5+7=15$. من الخطوات الـ 15 للعبة تكون خطوات اللاعب A هي: 1، 3، 5، 7، 9، 11، 13، 15. أي أن اللاعب A يلعب الخطوة الأخيرة (الخطوة 15) مهما كانت الحركات قبل هذه الخطوة. وبهذا فإن A سيفوز. وبهذا فإننا نستنتج من التحليل السابق أن أي إستراتيجية هي إستراتيجية رابحة للاعب A. □

مسألة (٤، ٢، ٤) [لعبة صينية تقليدية]

تحتاج هذه اللعبة كومين من الفيش ليس بالضرورة أن يكون عدد الفيشات في إحداهما مساويًا لعدد فيش الكوم الآخر. تلعب هذه اللعبة بين لاعبيْن. الخطوة في هذه اللعبة هي إما:

(i) أخذ أي عدد من الفيش من أحد الكومين. أو

(ii) أخذ عددين متساويين من الفيش من الكومين معًا.

الفائز هو اللاعب الذي يأخذ آخر فيشة من الكومين. أعط مثالين على موقف رابح (winning position). أعط مثالين على موقف خاسر (losing position).

الحل:

حل هذه المسألة لا يحتاج إلى خيال واسع. أولاً، نعرف ما نقصده بموقف رابح وموقف خاسر. الموقف الرابح هو موقف يواجه اللاعب ويخوله للفوز إذا لعبه اللاعب بحرفية. أما الموقف الخاسر فهو موقف يواجه اللاعب ويقوده إلى الخسارة أيًا كانت الطريقة التي سيتبعها (على فرض أن اللاعب الآخر سيلعب بحنكة).

$(1,0)$ هو موقف رابح تافه في لعبة هذه المسألة. $(1,0)$ يعني وجود فيشة واحدة في الكوم الأول وعدم وجود فيش في الكوم الثاني. وهو موقف رابح لأن بإمكان اللاعب أن يأخذ فيشة الكوم الأول وينهي اللعبة استنادًا إلى (i). وموقف رابح تافه آخر هو $(k,0)$ حيث k عدد صحيح موجب لأن اللاعب ينفذ (i) ويأخذ جميع فيش الكوم الأول وعددها k.

اعتبرنا أن الموقفين السابقين تافهين لأنهما يؤديان مباشرة إلى الفوز في اللعبة. أما الموقف الرابح غير التافه فإنه موقف يواجه اللاعب وعندئذ يكون على هذا اللاعب وضع خطة بحيث يسمح للاعب الآخر بتنفيذ خطوة واحدة على الأقل (قبل أن يضمن فوزه).

بالاستعانة بالفقرة السابقة نرى أن أي موقف $(j, j+1)$ حيث $j \geq 2$ هو موقف رابح. يستعين اللاعب الذي يواجه هذا الموقف بالقاعدة (ii) ويأخذ $j-1$ فيشة من كل كوم. عندئذ، يفرض على اللاعب الآخر أن يواجه الموقف $(1,2)$ وهذا موقف يؤدي إلى خسارة اللاعب الآخر أيًا كانت القاعدة التي سيتبعها:

(١) إذا أخذ اللاعب فيشة واحدة من كل كوم فإنه يبقى $(0,1)$ ومن ثم يفوز اللاعب الأول.

(٢) إذا أخذ اللاعب الآخر جميع فيشات الكوم الأول فإنه يبقى $(0,2)$ ومن ثم يفوز اللاعب الأول.

(٣) إذا أخذ اللاعب الآخر فيشة واحدة من الكوم الثاني فإنه يبقى $(1,1)$ ومن ثم يفوز اللاعب الأول.

(٤) إذا أخذ اللاعب الآخر جميع فيشات الكوم الثاني فإنه يبقى $(1,0)$ ومن ثم يفوز اللاعب الأول.

بناءً على ما تقدم نجد أن أي موقف $(1,k)$ حيث $k > 2$ هو موقف رابح لأن اللاعب الذي يواجه هذا الموقف يأخذ $k-2$ فيشة من الكوم الثاني ويبقى الموقف الخاسر $(1,2)$ أمام اللاعب الآخر.

أثناء إيجادنا مواقف رابحة وجدنا أيضًا أن الموقف $(1,2)$ (أو $(2,1)$) هو موقف خاسر.

أيضًا $(3,5)$ موقف خاسر. لرؤية ذلك دعنا ندرس جميع الخيارات الممكنة أمام اللاعب الذي سيواجه هذا الموقف.

- إذا اخذ اللاعب فيشة واحدة من الكوم الثاني فإنه يبقي أمام اللاعب الآخر الموقف $(3,4)$ وهذا الموقف هو موقف رابح كما رأينا سابقًا.
- إذا أخذ اللاعب 2 فيشة من الكوم الثاني فإنه يبقي أمام اللاعب الآخر الموقف $(3,3)$ وهذا موقف رابح استنادًا إلى القاعدة (ii).

- إذا أخذ اللاعب 3 فيشات من الكوم الثاني فإنه يبقي أمام اللاعب الآخر الموقف $(3,2)$ وهذا الموقف الرابح $(j+1,j)$ الذي رأيناه سابقًا.
- إذا أخذ اللاعب 4 فيشات من الكوم الثاني فإنه يبقي أمام اللاعب الآخر الموقف $(3,1)$. عندئذ، يقوم اللاعب الآخر بأخذ فيشة واحدة من الكوم الأول فيبقى أمام لاعبنا الموقف الخاسر $(2,1)$.
- إذا أخذ اللاعب جميع فيشات الكوم الثاني (5 فيشات) فإنه يبقي الموقف الرابح $(3,0)$ أمام اللاعب الآخر.
- إذا أخذ اللاعب فيشة واحدة من الكوم الأول فإن اللاعب الآخر يأخذ 4 فيشات من الكوم الثاني ويبقي أمام لاعبنا الموقف الخاسر $(2,1)$.
- إذا أخذ اللاعب 2 فيشتين من الكوم الأول فإن اللاعب الآخر يأخذ 3 فيشات من الكوم الثاني ويبقي أمام لاعبنا الموقف الخاسر $(1,2)$.
- إذا أخذ اللاعب جميع فيشات الكوم الأول فإنه يبقي أمام اللاعب الآخر الموقف الرابح $(0,5)$.
- بقي أمامنا اختبار الحالات التي يأخذ فيها لاعبنا عدد متساو من الفيشات من الكومين. وهذه الحالات مماثلة لما سبق وأن بيناه ونترك تفاصيلها للقارئ. □

مسألة تحدي (٤. ٢. ٥)

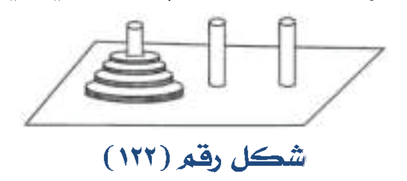
هل الموقف $(k,k+2)$ هو موقف خاسر دائمًا؟

مسألة تحدي (٤. ٢. ٦)

لدينا كوم من الفيشات عددها 15. يتناوب لاعبان تنفيذ خطوات هذه اللعبة. الخطوة هي أخذ 1 أو 2 أو 3 فيشات من الكوم. اللاعب الفائز هو من يكون بحوزته في نهاية اللعبة عددًا فرديًّا من الفيشات. صمم إستراتيجية فوز لكل من اللاعبين.

مسألة (٤, ٢, ٧) [برج هانوي-Hanoi tower]

يوضح الشكل رقم (١٢٢) الوضع الابتدائي للغز "برج هانوي" المشهور [يستخدم قراصنة الشبكة الإلكترونية، الإستراتيجية التي سنقدمها لدراسة هذه المسألة كنموذج لتدوير أشرطة أنظمة الحاسبات الاحتياطية].



شكل رقم (١٢٢)

لدينا أربع أقراص مختلفة الأحجام مركبة على الأسطوانة الواقة أقصى اليسار كما هو مبين في الشكل رقم (١٢٢). الهدف هو نقل جميع الأقراص إلى الأسطوانة الواقعة أقصى اليمين بحيث يكون ترتيبها في الوضع النهائي هو نفس ترتيبها في الوضع الابتدائي باستخدام القواعد التالية:

يتم نقل القرص الأعلى من أي أسطوانة إلى أي أسطوانة أخرى بشرط ألا يسمح بوضع قرص أكبر حجماً أعلى قرص أصغر حجماً. ما الإستراتيجية التي تمكننا من إنجاز ذلك؟

الحل:

نبدأ بحل المسألة الأبسط عندما يكون لدينا قرصان فقط.

- **الخطوة الأولى:** نقل القرص الأصغر إلى الأسطوانة الوسطى.
- **الخطوة الثانية:** نقل القرص الأكبر من الأسطوانة أقصى اليسار إلى الأسطوانة أقصى اليمين.
- **الخطوة الثالثة:** نقل القرص الأصغر من الأسطوانة الوسطى ووضعه أعلى القرص الأكبر في الأسطوانة أقصى اليمين ونكون قد انتهينا.

ننتقل الآن للحالة التي يكون فيها عدد الأقراص يساوي 3. رقم هذه الأقراص

من الأصغر إلى الأكبر بالأرقام 1، 2، 3 وافرض أن A، B، C هي الأسطوانات أقصى اليسار، في الوسط، أقصى اليمين على التوالي. نفذ الخطوات التالية:

(١) ضع 1 على C.

(٢) ضع 2 على B.

(٣) ضع 1 على B.

(٤) ضع 3 على C.

[لاحظ أننا استطعنا لحد الآن وضع 3 في مكانه الملائم أقصى اليمين ووضعنا 1 و 2 بالترتيب الصحيح في الوسط، وهذا مماثل لما قمنا بعمله في حالة القرصين]. لإكمال الحل:

(٥) ضع 1 على A

(٦) ضع 2 أعلى 3 على C

(٧) ضع 1 أعلى 2 على C

وبهذا نكون قد أنجزنا المهمة.

ننتقل الآن إلى حالة الأربعة أقراص. نفرض الآن أن الأقراص مرقمة من الأصغر إلى الأكبر بالأرقام 1، 2، 3، 4. سنقوم الآن بأسلوب مماثل لحالة الأقراص الثلاثة وننقل القرص 4 إلى الأسطوانة C ونبقي الأقراص 1، 2، 3 مرتبة على القرص A أو القرص B.

(١) ضع 1 على B.

(٢) ضع 2 على C.

(٣) ضع 1 على C.

(٤) ضع 3 على B.

(لاحظ هنا أن 4 أصبح حرًا ويجب نقله إلى C).

(٥) ضع 1 على A.

(٦) ضع 2 على B.

(٧) ضع 1 على B.

(الآن C فارغة و 1، 2، 3 مرتبة على B).

(٨) ضع 4 على C.

(٩) أنقل 1، 2، 3 إلى C مستخدمًا خطوات حالة الأقراص الثلاثة، ونكون قد انتهينا من حل حالة الأقراص الأربعة. □

لاحظ أن حلَّ مسألة أسهل قبل التوصل لحل مسألتنا الأساسية لم يكن مجرد تمرين، ولكنه أرشدنا إلى الطريق السليم وأتاح لنا فرصة استخدام الحالة الأسهل لتنظيم أسلوب حلنا للمسألة. كما أن حل حالة القرصين سهَّل علينا حل حالة الأقراص الثلاثة بطريقة سهلة وبارعة. وأخيرًا حل حالة الأقراص الثلاثة جعل شرح حل حالة الأربعة أقراص سهلاً.

مسألة تحدي (٤، ٢، ٨)

حل مسألة برج هانوي لخمسة أقراص.

مسألة تحدي(٤، ٢، ٩)

جد خوارزمية لتحويل مسألة برج هانوي بعدد k من الأقراص إلى مسألة بعدد $(k-1)$ من الأقراص.

مسألة تحدي (٤، ٢، ١٠)

بين إمكانية حل مسألة برج هانوي بعدد k من الأقراص بعدد من الخطوات لا يزيد على $2^k - 1$. في الحقيقة، جد خوارزمية قابلة للبرمجة (يمكن تنفيذها على حاسب آلي). هذه الخوارزمية ستكون مشابهة للخوارزمية التي نقدمها في البند (١، ٥) لحل بعض مسائل المربعات السحرية.

مسألة (٤، ٢، ١١)

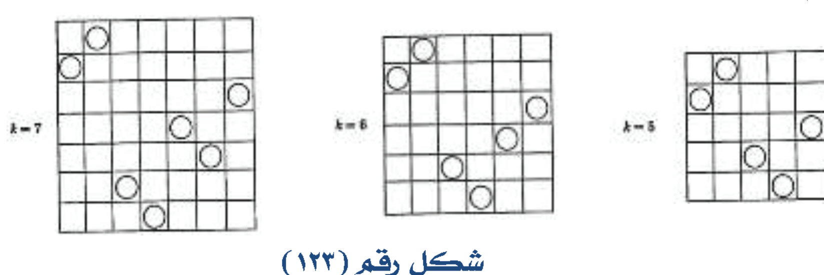
لدينا رقعة مربعة طول ضلعها k مقسمة إلى k^2 مربع وحدة (كما في رقعة الشطرنج). هل من الممكن وضع k من أحجار الداما (checkers) على مربعات الرقعة بحيث لا يسمح بوضع حجرين في صف واحد وعمود واحد ولا يسمح بوضع أي من الأحجار على أي من القطرين؟

الحل:

يكون من المناسب عادة محاولة حل المسألة لبعض الحالات الخاصة. من الواضح أن الرقعة من النوع 2×2 بسيطة وليست ذات قيمة. لذا نبدأ بحالة الرقعة من النوع 3×3 . لوضع حجر داما في العمود الأول فإننا لا نستطيع وضعه في الصف الأول (لأنه سيكون على قطر) ولنفس السبب لا يمكن أن يكون في الصف الثالث. إذن، يجب وضعه في الصف الثاني من العمود الأول. لذا فالحجر الذي سيوضع في العمود الثاني يجب أن يوضع إما في الصف الأول أو الصف الثالث (لا يمكن وضعه في الصف الثاني لأنه سيكون على قطر). وبما أن هذين الوضعين متماثلين فسنفترض أننا وضعناه في الصف الأول والعمود الثاني. عندئذ، حجر العمود الثالث لا بد من أن يوضع في الصف الثالث، وهذا مستحيل (لأنه سيكون على عمود). ولهذا نستنتج استحالة حلّ المسألة للرقعات من النوع 3×3 . من الطبيعي هنا الاعتقاد باستحالة حل المسألة لجميع الرقعات. ولكن دعنا نجرب حلها لرقعة من النوع 4×4 . بعد القيام ببعض المحاولات القليلة نجد أن وضع الأحجار في المواقع $(3,1)$، $(1,2)$، $(4,3)$، $(2,4)$ تحقق شروط المسألة [هنا الموقع (j,j) يعني الصف j والعمود j ويتم ترقيم الصفوف من الأعلى إلى الأسفل والأعمدة من اليسار إلى اليمين].

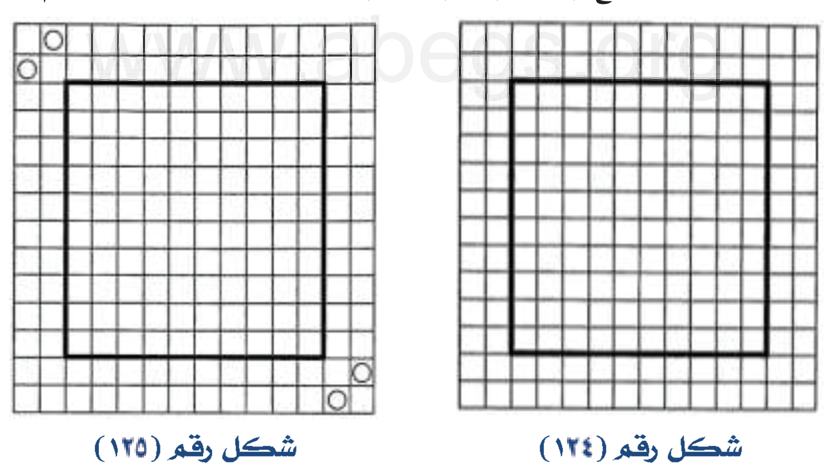
نعدل الآن المسألة على النحو التالي: إذا كانت الرقعة من النوع $k \times k$ حيث $k \geq 4$ فإنها ستحقق شروط المسألة. نستخدم الاستقراء لإثبات ذلك، لكن بإجراء بعض التعديلات البسيطة.

بينا إمكانية حل المسألة لرقعة من النوع 4×4 . حاول حل المسألة بنفسك للرقعات من الأنواع 5×5 و 6×6 و 7×7 أو انظر للحلول التي يقدمها الشكل رقم (١٢٣).



شكل رقم (١٢٣)

نبرهن الآن العبارة التالية: إذا استطعنا حل المسألة لرقعة من النوع $k \times k$ فإنه يمكن حلها لرقعة من النوع $(k+4) \times (k+4)$.لرؤية ذلك، قمنا برسم رقعة من النوع $k \times k$ داخل رقعة من النوع $(k+4) \times (k+4)$ كما هو مبين في الشكل رقم (١٢٤).



شكل رقم (١٢٤) شكل رقم (١٢٥)

بعد ذلك نقوم بوضع k من الأحجار في الأماكن الرابحة على الرقعة من النوع $k \times k$. الآن أضف 4 أحجار على الرقعة من النوع $(k+4) \times (k+4)$ في المواقع $(1,2)$، $(2,1)$، $(k+3, k+4)$، $(k+4, k+3)$ كما هو مبين في الشكل رقم (١٢٥). وبهذا نكون قد وجدنا حلاً للحالة $(k+4) \times (k+4)$.

وبهذا نكون قد أنهينا الحل بأربع خطوات:

(١) باستخدام حلّ الحالة 4×4 نحصل على حل للحالات $k = 4, 8, 12, 16, \cdots$.

(٢) باستخدام حلّ الحالة 5×5 نحصل على حل للحالات $k = 5, 9, 13, 17, \cdots$.

(٣) باستخدام حلّ الحالة 6×6 نحصل على حل للحالات $k = 6, 10, 14, 18, \cdots$.

(٤) وأخيراً باستخدام حل الحالة 7×7 نحصل على حل للحالات $k = 7, 11, 15, 19, \cdots$.

وبالتالي فإن المسألة صحيحة لكل $k \geq 4$. □

مسألة تحدي (٤، ٢، ١١)

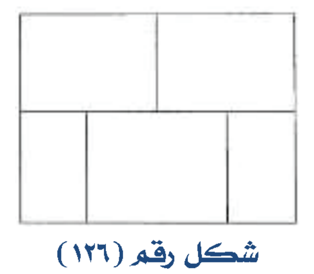
هل من الممكن وضع k من أحجار الداما على رقعة من النوع $k \times k$ بشرط أن نضع على كل صف حجر واحد فقط وعلى كل عمود حجر واحد فقط وعلى كل قطر من القطرين حجر واحد فقط؟

(٤، ٣) تتبع المسارات والتعلم من النوعية
Tracing Routes, and Learning From Parity

ندرس في هذا البند بعض أشهر مسائل الرياضيات البسيطة. بعضها يتعلق بتتبع الممرات كما في المسألة التالية:

مسألة (٤، ٣، ١)

لدينا شكل هندسي مبين في الشكل رقم (١٢٦).



شكل رقم (١٢٦)

هذا الشكل مكون من 16 قطعة مستقيمة (أضلاع). هل يمكن إيجاد ممر متصل يمرّ بكل من القطع المستقيمة مرة واحدة فقط؟ [ملحوظة: لا يسمح بمرور الممر من رأس، لكن يسمح فقط بالدخول أو الخروج من منطقة باستخدام نقاط ضلع داخلية].

هذه المسألة حيرت أجيال عديدة. سنرى بعد قليل أن هذه مسألة مستحيلة الحل حيث لا يمكن إنشاء مثل هذا الممر وسنستخدم لذلك تبرير منطقي سليم. ومع ذلك فإن بعض الأشخاص الذين يرفضون التبريرات الرياضية لم يتبعوا من محاولة إيجاد هذا الممر. تذكر دائما أن "حل" مسألة باستخدام برهان رياضي يعتبر من أدوات علم النفس لأن الغرض من وراءه هو إقناع القارئ بأن الحل صائب.

الحل:

لاحظ أن المستطيل الكبير في الشكل مقسم إلى خمس مناطق، ثلاثة منها (العلوي الأيسر والعلوي الأيمن والسفلي الأوسط) عدد أضلاع كل منها فردياً (خمسة أضلاع). الحقيقة المهمة هنا عن كون عدد أضلاع منطقة U فردياً هي: إذا بدأ ممر من U فإنه لن ينتهي في U وإذا بدأ ممر خارج U فإنه سينتهي في U. هذه الخاصية مهمة جداً وتحتاج إلى توضيح.

لنفرض أولاً أن V منطقة عدد أضلاعها يساوي 2. تذكر أن الشرط هو قطع كل من الأضلاع مرة واحدة فقط. إذا بدأ الممر من داخل V فإنه عند قطع ضلع لأول مرة سيخرج من V. الآن، استخدمنا أحد الضلعين، لذا يبقى ضلع واحد يقطعه الممر ويعود إلى داخل V (لاحظ أن الممر حسب الشرط يجب أن يقطعه في نهاية المطاف). وبهذا فالممر لن يخرج مرة أخرى من داخل V لعدم وجود أضلاع أخرى يقطعها. أي أن الممر سينتهي داخل المنطقة V.

تبرير الحالات التي يكون فيها عدد الأضلاع يساوي 4 أو 6 أو أي عدد زوجي مماثل:

إذا بدأ ممر من داخل المنطقة فإنه سينتهي داخل المنطقة، وإذا بدأ الممر من خارج المنطقة فإنه سينتهي خارجها.

التبرير للمناطق التي لها عدد فردي من الأضلاع هو العكس تمامًا. لنفرض أن W منطقة عدد أضلاعها 3. ولنفرض أن الممر بدأ داخل W. أول خطوة تكون بأن يقطع الممر أحد الأضلاع ويصبح خارج W. في وقت لاحق (ليس بالضرورة مباشرة) سيقطع الممر ضلع آخر من أضلاع W ويصبح داخل W. لاحظ أن يبقى ضلع واحد من أضلاع W لم يقطعه الممر. لذا فعند قطعه لهذا الضلع سينتهي الممر خارج W لعدم وجود أضلاع أخرى يقطعها ليعود إلى داخل W.

تبرير المناطق التي عدد أضلاعها 5 أو 7 أو أي عدد فردي مشابهه تمامًا.

نرجع الآن إلى مسألتنا. يوجد ثلاث مناطق أعداد أضلاعها فردية ولتكن E_1، E_2، E_3. إذا بدأ ممر من نقطة خارجة عن الثلاث مناطق جميعًا فإنه سينتهي داخل كل من هذه المناطق (وهذا ما بيناه سابقًا)، وهذا مستحيل لأن داخل المناطق E_j منفصلاً مثنى مثنى. إذن، يجب أن يبدأ الممر من نقطة داخل منطقة واحدة من هذه المناطق ولتكن E_1. وبهذا فإنه يبدأ بنقطة خارجة عن كل من E_2 و E_3. وكما بينا سابقًا فإن الممر ينتهي بنقطة خارج E_1 (لا يوجد تناقض هنا) وأيضًا ينتهي بنقطة داخل كل من E_2 و E_3، وهذا تناقض لعدم وجود نقاط مشتركة بين داخل E_2 و E_3.

والتبرير مشابه تمامًا لو بدأ الممر من نقطة داخل E_2 أو داخل E_3.

مما سبق نرى استحالة أن يبدأ الممر من أي نقطة من نقاط الشكل. وبهذا نخلص إلى استحالة إنشاء مثل هذا الممر. □

لاحظ أهمية استخدام "النوعية" في حلِّ المسألة السابقة. استخدمنا مفهوم النوعية للتفريق بين وجود عدد فردي أو عدد زوجي من الأضلاع. إذا حاولت حل المسألة على النحو التالي: "يمكن أن تبدأ بقطع هذا الضلع ثم بعد ذلك تتجه إلى الأعلى

وتقطع ذلك الضلع. الآن لدينا خياران، إما الاتجاه إلى اليسار أو الدوران والاتجاه إلى الناحية الأخرى. الآن، لدينا أربعة خيارات وهكذا". بالتأكيد ستصاب بنوع من الإحباط لأنه من الصعب جداً أن تتذكر جميع الخيارات والتفرعات. وبهذا ستقتنع أن استخدام النوعية (تذكر مسألة تغطية أرضية الحمام ببلاط التي سبق وأن قدمناها في الفصل الأول) يوفر عليك الكثير من التعقيدات ويقودك إلى حلّ سريع. بالطبع، يكمن أن يستخدم مبرمج جيد الحاسب الآلي لاستنفاد جميع الخيارات.

نقدم الآن مسألة تشبه المسألة السابقة التي لها أيضًا أهمية تاريخية حيث كان أول من قدم حلاً لها هو العالم الرياضي المشهور ليونارد أويلر (Leonhard Euler) الذي عاش في الفترة بين عامي 1707 و 1783. بعض المؤرخين ربطوا بداية التبولوجيا المستوية لهذه المسألة.

مسألة (٤، ٣، ٢) [مسألة الجسور السبعة].

توجد سبعة جسور في مدينة سانت بطرس بيرغ الروسية التي سميت بمدينة لينينغراد بعد الثورة الروسية. [البعض يدعي أن عدد الجسور ثمانية ولكن لمسألة الثمانية جسور حل مختلف كما سنرى لاحقًا]. الشكل رقم (١٢٧) يبين هذه الجسور.



الجسور السبعة لمدينة سانت بطرس بيرغ
شكل رقم (١٢٧)

هل من الممكن إنشاء ممر متصل يقطع كل من الجسور مرة واحدة فقط؟

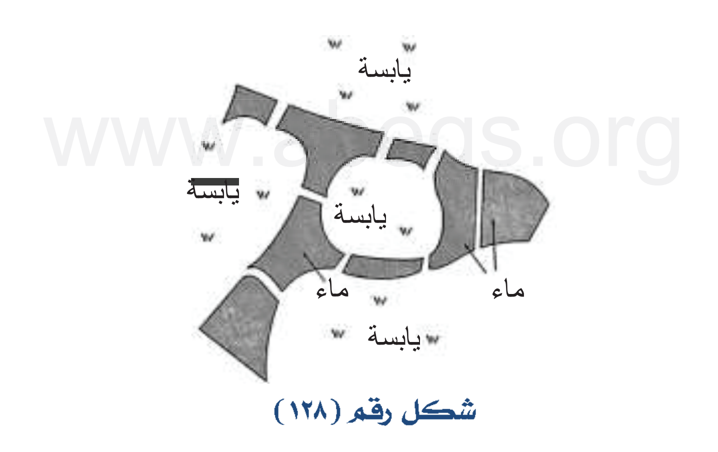
الحل:

المناطق المظللة في الشكل هي مناطق مائية ومناطق اليابسة والجسور غير مظللة. لاحظ أن كل من مناطق اليابسة الأربعة ترتبط بعدد فردي من الجسور. لذا فإن الوضع هنا يشابه وضع المسألة السابقة: إذا بدأ ممر من منطقة يابسة فإنه لن ينتهي على المنطقة اليابسة.

كتمرين، أكمل الحل لإثبات عدم إمكانية إنشاء ممر يحقق شرط المسألة.□

مسألة تحدي (٤. ٣. ٣)

الشكل رقم (١٢٨) يبين مدينة سانت بطرس بيرغ بوجود ثمانية جسور.



شكل رقم (١٢٨)

أثبت الآن، إمكانية إنشاء ممر متصل يقطع كل من الجسور مرة واحدة فقط. كم عدد الطرق المختلفة لحلِّ هذه المسألة؟

مسألة تحدي (٤. ٣. ٤)

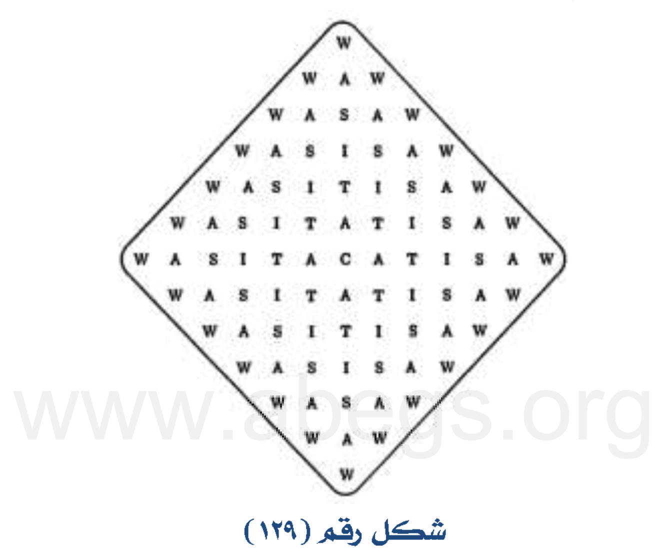
هل تستطيع إيجاد مجموعة جزئية مكونة من 7 جسور من مسألة التحدي السابقة بحيث يمكن إنشاء ممر متصل يقطع جميع هذه الجسور؟

مسألة (٤، ٣، ٥) [أسامة لويد-Sam Loyd]

يبين الشكل رقم (١٢٩) عدة حروف يمكن استخدامها لتكوين الجملة:

"WAS IT A CAT I SAW"

ابدأ عند أي ضلع واستخدم الحروف حرفًا حرفًا على الشكل بحيث تقرأ الجملة. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟



شكل رقم (١٢٩)

الحل:

إذا حاولت عد جميع الممرات الممكنة فإنك سرعان ما تتوصل إلى صعوبة ذلك. لذا لا بد من وجود فكرة لحلّ هذه المسألة.

محاولة خاطئة هي: بما أن الجملة تنتهي بكلمة "SAW" ومن ثم بالحرف "W" فإنها لا بد من أن تنتهي عند ضلع. وبالمثل، الجملة تبدأ بكلمة "WAS" ومن ثم تبدأ بالحرف "W" فإنها لابد من أن تبدأ عند ضلع. عدد حروف W عند كل ضلع يساوي 24 . كل جملة ستبدأ وتنتهي بهذا الحرف وكل من البدايات والنهايات ممكنة. إذن، عدد الطرق الممكنة لقراءة الجملة هو $572 = 24 \times 24$.

العدد الذي حصلنا عليه في الفقرة السابقة ليس هو العدد الصحيح (أصغر بكثير من العدد الصحيح)، لأننا لم نضع في عين الاعتبار أن الجملة متناظرة (palindrome). أي أنه يمكن قراءتها من اليمين إلى اليسار أو من اليسار إلى اليمين. ولكي نتوصل إلى العدد الصحيح نحتاج إلى: (i) البدء بحرف عند ضلع (ii) التحرك إلى المركز لتحصل على الجزء "WAS IT AC" ومن ثم ارجع إلى النقطة التي بدأت منها لتحصل على الجزء "AT I SAW".

وبالعد بهذا الأسلوب نجد أن هناك 252 طريقة مختلفة للبدء بحرف عند ضلع والانتهاء بالمركز (نترك لك إيجاد هذا العدد كتمرين). وبالطبع يوجد 252 طريقة مختلفة للبدء من المركز والانتهاء عند ضلع. لذا فالممر يتألف من ممر من النوع الأول متبوعاً بممر من النوع الثاني. إذن، عدد الممرات المختلفة يساوي $252^2 = 63504$. وهذا العدد أكبر بكثير من التخمين الأول وهو 576. □

انشغل المهتمون بحل الألغاز بفكرة الجمل المتناظرة لعدد من السنوات. أطول جملة متناظرة مرت على المؤلف هي:

GO HANG A SALAMI I'M A LASAGNA HOG

يحتوي الرابط:

http:/www.cs.brown.edu/people/nfp/palindrome.html

على العديد من أمثلة الجمل المتناظرة ومعلومات عن كيفية إنشائها.

مسألة تحدي (٤، ٣، ٦)

يبين الشكل رقم (١٣٠) ثلاثة أكواب زجاجية موضوعة على مائدة لاحظ أن الكوب الأوسط مقلوب والأيسر والأيمن بالوضع الاعتيادي. الخطوة هي قلب كوبين معاً. الهدف هو جعل الأكواب الثلاث بوضع اعتيادي (الفتحة للأعلى). أثبت استحالة الوصول إلى هذا الهدف.



شكل رقم (١٣٠)

مسألة (٤, ٣, ٧)

نقول إن نقطة في الفضاء ثلاثي البعد $\mathbb{R}^3$ هي نقطة شبكية إذا كانت إحداثياتها أعدادًا صحيحة. خذ أي 9 نقاط شبكية في الفضاء $\mathbb{R}^3$. عدد القطع المستقيمة التي تصل بين كل نقطتين منها يساوي 36 (لماذا؟). أثبت وجود قطعة مستقيمة من بين هذه القطع بحيث تكون نقطة منتصفها نقطة شبكية.

الحل:

لاحظ أولاً أن نقطة منتصف قطعة مستقيمة طرفاها نقطتان شبكيتان ليست بالضرورة نقطة شبكية. فمثلاً، إذا كانت $A = (0,0,0)$ و $B = (1,1,1)$ فإن نقطة المنتصف هي :

$$C = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ليست نقطة شبكية. إن السبب وراء ذلك يعود إلى ملاحظة أن نقطة منتصف $A = (a,b,c)$ و $B = (a',b',c')$ هي:

$$C = \left(\frac{a+a'}{2},\frac{b+b'}{2},\frac{c+c'}{2}\right).$$

ولكي تكون C نقطة شبكية فإنه يجب أن يكون كل من $a+a'$ و $b+b'$ و $c+c'$ عددًا زوجيًّا. أي أن a و a' (وبالمثل b و b'، c و c') إما أن يكونا زوجيين معًا أو أن يكونا فرديين معًا.

لنفرض أن e يقابل "زوجي" و o يقابل "فردي". عندئذ، الخيارات الممكنة

لنوعية نقاط الفضاء الشبكية هي:

$$\begin{array}{ccc} (e,e,e) & (e,e,o) & (e,o,o) \\ (e,o,e) & (o,o,o) & (o,o,e) \\ (o,e,e) & (o,e,o) & \end{array}$$

وعددها 8. ولكن في المسألة لدينا 9 نقاط شبكية، ومن ثم لا بد من وجود نقطتين لهما النوعية نفسها. وبهذا تكون نقطة منتصف هاتين النقطتين نقطة شبكية أيضاً. □

(٤, ٤) مسائل حســـــابية غامضة
Mysterious Arithmetic Problems

في هذا البند، نقدم صنفاً من المسائل ينسب إلى الرياضي الإنجليزي بيرويك (Berwick) الذي عاش في المنتصف الأول من القرن الماضي، ومن الممكن أن تكون قد ظهرت قبل بيرويك بعدد من السنوات.

مسألة (٤, ٤, ١)

لنفرض أن لدينا عملية الجمع التالية:

$$\begin{array}{rrrrr} & L & E & T & S \\ + & W & A & V & E \\ \hline L & A & T & E & R \end{array}$$

حيث الحروف المختلفة تقابل خانات مختلفة مأخوذة من الخانات $0,1,2,\cdots,9$. وقوع الحرف مرتان أو أكثر (مثل A) يقابل الخانة نفسها. السؤال هنا هو إيجاد جميع الخانات.

الحل:

نبدأ بالحرف L من حروف الكلمة LATER.

هذا الحرف ناتج عن حمل من جمع $W + L$. وبما أن L ناتج عن عملية جمع

L و W وكل منهما لا يزيد على 9 فإن القيمة الوحيدة التي سيأخذها L هي 1 (حتى مع وجود حمل عند جمع E مع A). إذن، $L = 1$.

الآن، $A = 0$ لأن $L = 1$ و $W = 8$ أو $W = 9$. إذا كان $W = 8$ فإنه يوجد حمل من جمع E مع A. وبما أن $A = 0$ فإن $E = 9$ ونكون مجبرين على حمل من جمع T و V لكي لا تكون $T = E$. ولكن هذا لا يساعد لأنه بعد الحمل ستصبح قيمة T تساوي 0 ولكن الصفر مأخوذ $(A = 0)$. إذن، $W \neq 8$ وبهذا يكون $W = 9$. عندئذ، نكون قد توصلنا إلى الوضع:

$$\begin{array}{r} 1\ E\ T\ S \\ +\ 9\ 0\ V\ E \\ \hline 1\ 0\ T\ E\ R \end{array}$$

الآن، مهما كانت قيمة E فإن قيمة T تساوي $E + 1$ (من الحمل لجعل $T \neq E$). كما أن $T + V = E$. لكن هذا ممكن فقط إذا كان $V = 9$ (وهذا مستحيل لأن 9 قد أخذ سابقًا). إذن، $V = 8$ ، ويجب أن ينتج حمل عن جمع S و E. لدينا الآن:

$$\begin{array}{r} 1\ E\ T\ S \\ +\ 9\ 0\ 8\ E \\ \hline 1\ 0\ T\ E\ R \end{array}$$

لاحظ أن $T \neq 2$ لأنه لو كان $T = 2$ فإن $E = 1$ وهذا سبق أن تمَّ استخدامه.

إذا كان $T = 3$ فإن $E = 2$ ونحصل على:

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ S \\ +\ 9\ 0\ 8\ 2 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 2\ R \end{array}$$

بما أنه سبق استخدام 8 و 9 فإن $S \leq 7$. ولكن لا يمكن أن ينتج حمل عن $S + 2$. لذا فإن $T \neq 3$.

إذا كان $T = 4$ فإن $E = 3$ ونحصل على:

$$\begin{array}{r} 1\;3\;4\;S \\ +\;9\;0\;8\;3 \\ \hline 1\;0\;4\;3\;R \end{array}$$

وهذا مستحيل لأنه لو كان $S = 7$ فإنه $R = 0$، وهذا سبق أن استخدم،

أما إذا كان $S = 6$ فلا ينتج حمل عن جمع $S + 3$. إذن، $T \neq 4$. أيضًا $T = 5$ مستحيل بالأسلوب نفسه ونتركه كتمرين للقارئ.

دعنا نجرب $T = 6$. عندئذ، $E = 5$ ويكون:

$$\begin{array}{r} 1\;5\;6\;S \\ +\;9\;0\;8\;5 \\ \hline 1\;0\;6\;5\;R \end{array}$$

الفرق هنا هو أن $S = 7$ و $R = 2$ خيار جيد ويؤدي إلى الحلِّ:

$$\begin{array}{r} 1\;5\;6\;7 \\ +\;9\;0\;8\;5 \\ \hline 1\;0\;6\;5\;2 \end{array}$$

نترك لك إثبات استحالة أن يكون $T = 7$. أما $T = 8$ فهو مستحيل لأنه مأخوذ سابقًا. وبهذا نكون قد وجدنا الحلّ الوحيد للمسألة. □

مسألة تحدي(٤، ٤، ٢)

اتبع خطوات حل المسألة السابقة لحلِّ مسألة الجمع:

$$\begin{array}{r} S\;E\;N\;D \\ +\;M\;O\;R\;E \\ \hline M\;O\;N\;E\;Y \end{array}$$

المسألة التالية مختلفة وذات صعوبة متوسطة:

مسألة (٤، ٤، ٣)

في مسألة القسمة التالية، وضعنا * لطمس الأعداد:

			*	5	3			
*	*	9	6	*	8	*	*	*
			*	*	*	2		
				*	9	*	*	
				*	*	4	*	
					*	*	4	*
					*	*	*	*

يمكن تحديد كل من الأعداد المطموسة بطريقة وحيدة باستخدام المعلومات المعطاة. جد الأعداد المطموسة.

الحل:

نبدأ أولاً بإعطاء حروف للأعداد * لسهولة الرجوع إليها:

			a	5	3				
b	c	9	6	d	8	e	f	g	**السطر الأول**
			h	i	j	2			**السطر الثاني**
				k	9	l	m		**السطر الثالث**
				n	o	4	p		**السطر الرابع**
					q	r	4	s	**السطر الخامس**
					t	u	v	w	**السطر السادس**

لاحظ أولاً أن $3 \times bc9 = tuvw$ **(السطر السادس). إذن،** $w = 7$ **مع ناتج حمل يساوي** 2**. ولكن** $c = 4$ **و** $s = w = 7$**. وبما أن السطر الثالث هو** $5 \times b49$ **نجد أن** $p = 5$**. ويكون الآن لدينا الوضع التالي:**

		$a\ 5\ 3$
السطر الأول	$b\ 4\ 9$	$6\ d\ 8\ e\ f\ g$
السطر الثاني		$h\ i\ j\ 2$
السطر الثالث		$k\ 9\ l\ m$
السطر الرابع		$n\ o\ 4\ 5$
السطر الخامس		$q\ r\ 4\ 7$
السطر السادس		$t\ u\ 4\ 7$

الآن، $m = 9$ (لأن $9 - 5 = 4$). إذن، $f = 9$. لاحظ أيضاً أن $a = 8$ وذلك لأن الخانة الأخيرة (أقصى اليمين) من السطر الثاني هي 2 . لذا فإن $j = 9$.

لدينا الآن:

		$8\ 5\ 3$
السطر الأول	$b\ 4\ 9$	$6\ d\ 8\ e\ 9\ g$
السطر الثاني		$h\ i\ 9\ 2$
السطر الثالث		$k\ 9\ l\ 9$
السطر الرابع		$n\ o\ 4\ 5$
السطر الخامس		$q\ r\ 4\ 7$
السطر السادس		$t\ u\ 4\ 7$

لاحظ أن $g = 7$ وأن $h = 6$. إذن، $b = 7$ أو $b = 8$. إذا كانت $b = 8$ فإن $hi92 = 6792$ وأن $no45 = 4245$ ونحصل على:

		8 5 3
السطر الأول	8 4 9	$6\ d\ 8\ e\ 9\ 7$
السطر الثاني		$6\ 7\ 9\ 2$
السطر الثالث		$k\ 9\ l\ 9$
السطر الرابع		$4\ 2\ 4\ 5$
السطر الخامس		$9\ r\ 4\ 7$
السطر السادس		$t\ u\ 4\ 7$

لدينا الآن مشكلة لأن k يجب أن يكون 4 . وهذا يعني أن $d = 2$. لكن عملية طرح السطر الثاني من السطر الأول ستكون خاطئة لأن السطر الثاني صغير جدًّا. إذن، لا يمكن أن يكون $b = 8$. إذن، $b = 7$ ونحصل على الشكل:

		8 5 3
السطر الأول	8 4 9	$6\ d\ 8\ e\ 9\ 7$
السطر الثاني		$5\ 9\ 9\ 2$
السطر الثالث		$k\ 9\ l\ 9$
السطر الرابع		$3\ 7\ 4\ 5$
السطر الخامس		$q\ r\ 4\ 7$
السطر السادس		$2\ 2\ 4\ 7$

نكون الآن قد وجدنا خارج القسمة والمقسوم عليه ومن ثم بضربهما نحصل على العدد 638897 . ومن السهل الآن الحصول على باقي الخانات. □

نقدم الآن مسألة بيرويك وهي ليست أعقد من المسألة السابقة، لكنها تحتاج إلى خطوات أكثر للحصول على الحل. يمكن القول: إنها أشهر مسألة من هذا النمط.

مسألة (٤.٤.٤) [بيرويك]

في عملية القسمة التالية طمسنا جميع الخانات ما عدا العدد 7 . جد هذه الخانات.

```
                  * * 7 * *
            ---------------------
* * * * 7 * | * * 7 * * * * * * *
              * * * * * *
              -----------
              * * * * * 7 *
              * * * * * * *
              -------------
                  * 7 * * * *
                  * 7 * * * *
                  -----------
                  * * * * * * *
                  * * * * 7 * *
                  -------------
                      * * * * * *
                      * * * * * *
                      -----------
```

الحل: باتباع الحل الذي قدمه دوري (Dörrie)، انظر [DOR] نستبدل كل من العلامات * برمز ليسهل الرجوع إليها، كما أننا نرقم الأسطر.


```
               α β 7 γ δ
             ---------------------
θ η ν ε 7 σ | A B 7 C D E F G H I
               J K L M N O
              -----------
               P Q R S T 7 U          السطر الثالث
               W X Y Z Γ Ω μ          السطر الرابع
              -------------
                   a 7 b c d e        السطر الخامس
                   f 7 g h i j        السطر السادس
                  -----------
                   k π m n o p q      السطر السابع
                   r s t u 7 v w      السطر الثامن
                  -------------
                       x y z φ τ ρ    السطر التاسع
                       x y z φ τ ρ    السطر العاشر
                      -----------
```

نرمز للقاسم (العدد المقسوم عليه) بالرمز $\mathcal{D}$. العدد θ في $\mathcal{D}$ يجب أن يكون 1 لأنه لو كان 2 سنجد أن عدد خانات $\mathcal{D} \times 7$ يساوي 7، لكن هذا العدد يساوي 6 كما هو مبين في السطر السادس.

بما أن عدد خانات الباقي في السطر الثالث يساوي 6 هي PQRST7 فإن $\mathrm{P} = 1$ لأنه لو كان غير ذلك سنضرب القاسم $\mathcal{D}$ في العدد AB7CDE مرة أخرى. وللسبب نفسه نجد أن $\mathrm{k} = 1$. من ذلك نجد من الطرح أن $W = 1$ و $r = 1$.

لا يمكن أن يكون القاسم $\mathcal{D}$ أكبر من 199979 ولا يمكن أن يكون γ أكبر من 9. ولذا فالسطر الثامن وهو حاصل ضربهما لا يمكن أن يزيد على 1799811. على وجه الخصوص $s < 8$. الآن، π يمكن أن يكون فقط 9 أو 0 (لأنه ناتج طرح 7 من 7)، لكنه لا يمكن أن يكون 9 (لعدم وجود خانات في السطر التاسع أسفل r و s). إذن، $\pi = 0$. ولكن $k = 1$. إذن، $s = 0$. لاحظ أيضًا أن $k = 1$ و $\pi = 0$ يؤدي إلى $a = f + 1$. إذن، $f \leq 8$. من ذلك نرى أن السطر السادس لا يمكن أن يزيد على $87ghij$.

إذا كان $\eta \geq 3$ فإنه مهما كانت الخانات الأخرى يجب أن يكون $\mathcal{D}$ على الأقل 130000، ومن ثم فالسطر السادس الناتج من حاصل الضرب $\mathcal{D} \times 7$ يجب أن يكون أكبر من 900000. ولكننا سبق وأن استثنينا ذلك. إذن، η هو 0 أو 1 أو 2. η لا يمكن أن يساوي 0 لأنه لو كان يساوي صفرًا فإن السطر الثامن لا يمكن أن يكون مكونًا من 7 خانات. وإذا كان η يساوي 1 فإن υ يساوي 0 أو 1 لأنه لو كان υ على الأقل 2 فإن $\mathcal{D} \times 7$ (حاصل ضرب الخانة الثالثة من خارج القسمة في القاسم) يجب أن تكون $\upsilon \times 7$ وهذا عدد مكون من خانتين وبهذا يجب أن ينتج عنه حمل. ولكن لا يمكن أن تكون الخانة الثانية من السطر السادس تساوي 7. إذن، υ إما أنه 0 أو 1. إذا كان υ يساوي 0 فإن القاسم سيكون صغيرًا (لا يمكن أن يحتوي السطر الثامن على سبع خانات). إذن، υ يجب أن يساوي 1.

بفرض أن υ يساوي 1 فإن القاسم يكون $111\varepsilon7\sigma$. السطر الثامن هو حاصل ضرب هذا العدد بالعدد γ . لهذا يجب اختيار ε و σ و γ ليكون عدد خانات السطر الثامن يساوي سبعة. وهذا يحتم أن يكون γ يساوي 9 . ولكي تكون الخانة الثالثة (من اليمين) من السطر الثامن تساوي 7 يجب أن يكون $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 9$. لكن $\varepsilon = 0$ مستحيل لأنه لو كان كذلك فإن عدد خانات السطر الثامن سيكون ست خانات. كما أن $\varepsilon = 9$ مستحيل أيضًا لأنه لو كان كذلك سيبدأ السادس بالخانات 783 . بهذا نكون قد توصلنا إلى استحالة أن يكون $\upsilon = 1$.

دعنا نلخص الآن ما وجدنا. أردنا أن نرى فيما إذا كان η يساوي 1 . وإذا كانت كذلك فإن υ تساوي 0 أو 1، ولكننا استبعدنا هذين الخيارين للخانة υ . إذن، η لا يمكن أن تكون 1 . واستبعدنا أيضًا أن تكون تساوي 0 . إذن، الخيار الوحيد هو أن $\eta = 2$. وبمعرفة ذلك نجد مباشرة أن $f = 8$ ومن ثم $a = 9$.

الآن، الخانة الثالثة υ من $\mathcal{D}$ يجب أن تكون 4 أو 5 لأن 12600×7 أكبر من السطر السادس وأن 12600×4 أصغر من السطر السادس. وبالمثل، بما أن 124000×9 أكبر من السطر الثامن وأن 126000×7 أصغر من السطر الثامن فإن γ يجب أن تساوي 8 . لنرى الآن أي من 4 أو 5 يساوي υ . بما أن $1000000 < 124979 \times 8$ فإن $\upsilon = 4$ سيناقض السطر الثامن. إذن، $\upsilon = 5$.

الشكل التالي يلخص ما وجدناه لحد الآن:

	$\alpha\ \beta\ 7\ 8\ \delta$
$125\varepsilon7\sigma$	$A\ B\ 7\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I$
	$J\ K\ L\ M\ N\ O$
السطر الثالث	$\pi\ Q\ R\ S\ T\ 7\ U$
السطر الرابع	$\pi\ X\ Y\ Z\ \Gamma\ \Omega\ \mu$
السطر الخامس	$9\ 7\ b\ c\ d\ e$
السطر السادس	$8\ 7\ g\ h\ i\ j$
السطر السابع	$\pi\ 0\ m\ n\ o\ p\ q$
السطر الثامن	$\pi\ 0\ t\ u\ 7\ v\ w$
السطر التاسع	$x\ y\ z\ \varphi\ \tau\ \rho$
السطر العاشر	$x\ y\ z\ \varphi\ \tau\ \rho$

الآن، السطر الثامن يساوي $7 \times 125\varepsilon7\sigma$ وأن الخانة الثالثة من هذا السطر هي 7 . إذن، ε يساوي 4 أو 9 (جرب فقط الخيارات الممكنة). ولكن لا يمكن أن تساوي ε العدد 9 ؛ لأن في هذه الحالة سيكون 7×125970 حداً أدنى للسطر السادس، وهذا كبير. إذن، $\varepsilon = 4$. وفي هذه الحالة يجب أن يكون $\sigma \in \{0,1,2,3,4\}$ (احذف الخيارات الأخرى لأن الخانة الثالثة من حاصل الضرب $8 \times 12547\sigma$ يجب أن تكون 7). وأي كانت القيمة التي تساويها v فإنها ستؤدي إلى أن $g = 8$ ؛ وذلك من $7 \times 12547\sigma = 878***$.

بالمثل، من السطر الثامن لدينا $8 \times 12547\sigma = 10037**$ ومن ثم فإن $t = 0$ و $u = 3$.

بما أن $\beta \times \mathcal{D} = \beta \times 12547\sigma$ يعطينا الخانة السابعة من السطر الرابع وأن العددين المكونين من 7 خانات هما فقط $8 \times \mathcal{D}$ و $9 \times \mathcal{D}$ فإن β إما 8 أو 9 .

الآن، $t = 0$ و $x \geq 1$. وبما أن $k = r = 1$ و $\pi = s = 0$ نجد أن

$m \geq 1$. ولكن $g = 8$ و $b \leq 9$ يؤدي إلى أن $m \leq 1$. إذن، $m = 1$. وبهذا فإن
$b = 9$ وإن $x = 1$. ومن ذلك ومن $2 \times \mathcal{D} \geq 2000$ (السطر التاسع) نجد أن
$\delta = 1$. كما أن $y = 2$، $z = 5$، $\varphi = 4$، $\tau = 7$، $\rho = \sigma$.

الشكل التالي يلخص ما توصلنا إليه:

	$\alpha\ \beta\ 7\ 8\ \pi$
$\pi\,2\,5\,4\,7\,\sigma$	$A\ B\ 7\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ \sigma$
	$J\ K\ L\ M\ N\ 0$
السطر الثالث	$\pi\ Q\ R\ S\ T\ 7\ U$
السطر الرابع	$\pi\ X\ Y\ Z\ \Gamma\ \Omega\ \mu$
السطر الخامس	$9\ 7\ b\ c\ d\ e$
السطر السادس	$8\ 7\ g\ h\ i\ j$
السطر السابع	$\pi\ 0\ \pi\ n\ o\ p\ q$
السطر الثامن	$r\ 0\ 0\ 3\ 7\ v\ w$
السطر التاسع	$\pi\ 2\ 5\ 4\ 7\ \sigma$
السطر العاشر	$\pi\ 2\ 5\ 4\ 7\ \sigma$

تذكر أن $\sigma \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. إن هذا يؤدي على التوالي إلى أن

$$\text{vw} = 60, 68, 76, 84, 92$$

$$\text{opq} = 290, 297, 304, 311, 318$$

الآن، يعتمد فيما إذا كان β يساوي 8 أو 9 نجد:

$$\Omega\mu = 60, 68, 6, 84, 92$$

أو

$$\Omega\mu = 30, 39, 48, 57, 66$$

وبهذا لدينا عشر خيارات. وباستخدام الأسطر من التاسع إلى الثالث نجد أن

$\sigma = 3$، $\beta = 8$ يتفق مع أن الخانة الثالثة في السطر الثالث هي 7 . عندئذ، نجد أن $vw = 84$، $nopq = 6331$، $hij = 311$، $cde = 944$، $XYZ\Gamma\Omega\mu = 003784$، $QRST7U = 101778$. وبهذا تأخذ المسألة الشكل التالي:

	$\alpha\ \pi\ 7\ 8\ \pi$
125473)	$A\ B\ 7\ C\ D\ E\ 8\ 4\ \pi\ 3$
	$J\ K\ L\ M\ N\ 0$
السطر الثالث	$\pi\ \pi\ 0\ \pi\ 7\ 7\ 8$
السطر الرابع	$\pi\ 0\ 0\ 3\ 7\ 8\ 4$
السطر الخامس	$9\ 7\ 9\ 9\ 4\ 4$
السطر السادس	$8\ 7\ 8\ 3\ \pi\ \pi$
السطر السابع	$\pi\ 0\ \pi\ 6\ 3\ 3\ \pi$
السطر الثامن	$r\ 0\ 0\ 3\ 7\ 8\ 4$
السطر التاسع	$\pi\ 2\ 5\ 4\ 7\ 3$
السطر العاشر	$\pi\ 2\ 5\ 4\ 7\ 3$

لاحظ أن من بين جميع مضاعفات القاسم $\mathcal{D}$ نجد أن المضاف $5 \times \mathcal{D}$ هو فقط الذي يعطي عدداً خانته الثالثة هي 7 (قارن السطر الثالث). إذن، $\alpha = 5$. من ذلك نجد أن:

$JKLMNO = 627365$ و $AB7CDE = 737542$.

وبهذا نحصل على الشكل التالي:

```
            5 8 7 8 1
1 2 5 4 7 3 | 7 3 7 5 4  2 8  4  1 3
              6 2 7 3 6  5
              1 1 0 1 7  7 8
              1 0 0 3 7  8 4
                  9 7 9  9 4  4
                  8 7 8  3 1  1
                  1 0 1  6 3  3  1
                  1 0 0  3 7  8  4
                         1  2 5  4 7 3
                         1  2 5  4 7 3
```

تأكد من أن جميع خطوات القسمة صحيحة وبهذا نكون قد وجدنا جميع الخانات المطموسة □

(٤، ٥) مفاجئات
Surprises

توجد بعض المسائل التي يعتبرها العديد من الأشخاص بما فيهم المتمرسين بحل المسائل على أنها ليست ذات قيمة ومن ثم يتجاهلونها. قدمنا مثل هذه المسائل في البنود السابقة. فمثلاً، المسألة (٣، ٢، ٤) بينت أن احتمال أن يكون لشخصين من بين 23 شخصاً يوم الميلاد نفسه أكبر من نصف. والمسألة (٣، ١، ٨) بيّنت أنه إذا قسمنا مجموعة من ورق اللعب إلى ثلاثة أقسام ووضعناها مقلوبة على مائدة فإن احتمال أن تكون أحد الأوراق العلوية صورة أكبر من نصف. نقدم في هذا البند مسائل من هذا النوع.

مسألة (٤، ٥، ١) [تحتاج إلى تفاضل وتكامل]

لديك عدد غير محدود من أحجار الدومينو بُعد كل منها 2×1 بوصة مربعة وغرفة طولها 10 أقدام بدون سقف. بدأنا بوضع الأحجار على أرض الغرفة

(من بداية حائط) فوق بعضها البعض كما هو مبين في الشكل رقم (١٣١). هل يمكن الاستمرار على هذا المنوال لتصل إلى الحائط الآخر الذي يبعد 10 أقدام عن الحائط الأول من دون أن تسقط الأحجار؟



شكل رقم (١٣١)

الحل:

مفتاح حل هذه المسألة هو ملاحظة إنه إذا رتبنا الأحجار بحيث يكون طول الجزء من الحجر j غير المرتكز على الحجر $j-1$ يساوي λ_j بوصة فإن عزم القصور الذاتي للحجر j هو:

$$\int_0^t \rho t dt$$

حيث ρ هي الكثافة الخطية لأحجار الدومينو. ولغرض التبسيط نفرض أن $\rho = 1$. عندئذ، يكون عزم القصور الذاتي للحجر j يساوي:

$$\frac{\lambda_j^2}{2}.$$

إذا وضعنا N من الأحجار على النمط المبين في الشكل رقم (١٣١) فإن عزم القصور الذاتي للنظام هو:

$$M = \sum_{j=2}^{N} \frac{\lambda_j^2}{2}$$

[لاحظ أننا بدأنا عند $j = 2$ لأن الحجر الأول موضوع مباشرة على أرضية الغرفة ويمكن تجاهل عزمه لعدم وجود تأثير له في حل المسألة].

لنفرض أن c عدد ثابت موجب وأن $\lambda_2 = \frac{c}{2}$، $\lambda_3 = \frac{c}{3}$ وبصورة عامة $\lambda_j = \frac{c}{j}$. عندئذ:

$$M = \sum_{J=2}^{N} \frac{(c / j)^2}{2} = \frac{c^2}{2} \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j^2}.$$

هذا المجموع يتقارب إلى عدد منته يعتمد على c ولكنه لا يعتمد على N.

ولكن مجموع الأطوال:

$$L = \sum_{j=2}^{N} \lambda_i = \sum_{j=2}^{N} \frac{c}{j} = c \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j}$$

يزداد من دون حدود مع الزيادة في N.

إذا كان c عدداً موجباً صغيراً جداً فإنه يمكن جعل عزم القصور صغيراً جداً. لذا فمن الممكن اختيار c صغيراً صغراً كافياً بحيث يمنع وقوع الأحجار. ولكن المجموع L يكبر بدون حدود. ومن ثم تصل الأحجار إلى أي طول نرغب به.

إجابة السؤال "نعم". أي يمكن أن تصل الأحجار إلى مسافة 10 أقدام عن الحائط الأول. □

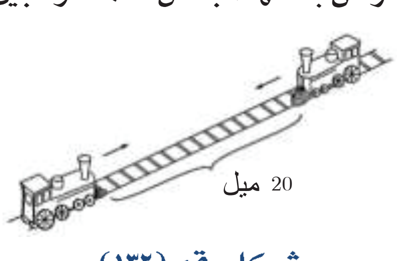
مسألة تحدي (٤. ٥. ٢) [هذه مسألة صعبة]

جد تقديراً لعدد الأحجار اللازمة للوصول من حائط إلى حائط على طول الغرفة كما هو مبين في المسألة السابقة [إرشاد: العدد المطلوب كبير جداً. استخدم الحاسب الآلي لإجراء بعض المحاولات].

إجابة المسألة التالية ليست مفاجئة ولكن المفاجئة سنجدها أثناء الحلّ.

مسألة (٤، ٥، ٣)

تقترب عربتا قطار من بعضها البعض كما هو مبين في الشكل رقم (١٣٢).



شكل رقم (١٣٢)

المسافة بينهما في البداية تساوي 20 ميلاً. يسير كل منهما بسرعة 10 أميال في الساعة. في لحظة بداية تحركهما تحركت ذبابة أمام أحدهما بسرعة 15 ميلاً في الساعة. عند وصول الذبابة إلى مقدمة العربة الثانية تقفل عائدة باتجاه العربة الأولى. استمرت على هذا المنوال ذهابًا وإيابًا إلى أن تمَّ سحقها عند تقابل العربتين. ما المسافة الخطية التي قطعتها الذبابة ذهابًا وإيابًا قبل أن تلقى مصيرها؟

هذه إحدى المسائل المشهورة التي استمر تداولها بين عشاق الألغاز لفترة لا تقل عن خمسين عامًا. عندما طرحت على جون فانن نيومان (أحد أذكى العلماء والذي اهتم أيضًا بحلِّ المسائل في القرن الماضي) استغرق حلّه لها بضع ثواني فقط. اعترف لاحقًا أنه قام بحساب المسافات غير المنتهية التي قطعتها الذبابة (ذهابًا وإيابًا وذهابًا وهكذا) ومن ثم وجد مجموع هذه المسافات. نقدم هنا حلاً يتناسب مع مستوى هذا الكتاب: إن للعمل الجاد أهمية خاصة ويحقق نتائج في غالب الأحوال ولكن الفكرة الذكية تختصر الكثير من الجهد.

الحل:

ما المسافة التي تقطعها كل من العربتين قبل لقاءهما؟ هذا أمر سهل حسابه لأن المسافة بينهما تساوي 20 ميلاً وكل منهما يسير بسرعة 10 ميل في الساعة. لذا كل منهما يسير 10 أميال قبل التصادم. أي الزمن اللازم للتصادم هو ساعة واحدة.

ولكن، خلال هذه الساعة تكون الذبابة قد قطعت مسافة 15 ميلاً. □

مسألة (٤. ٥. ٤)

تخيل أننا طوقنا خط استواء سطح الأرض بسلك فولاذي مشدود حول خط الاستواء. سيكون طول هذا السلك 25000 ميل. لنفرض الآن أننا أضفنا طولاً للسلك كافيًّا لكي يكون أعلى سطح الأرض بمقدار قدم واحد فقط. (مع الاستمرار بتشكيل عروة دائرية متصلة). ما مقدار الطول الإضافي للسلك لكي يتحقق ذلك؟ [نفرض لحل هذه المسألة أن الأرض كروية وأن السلك المشدود جيدًا حول خط الاستواء يشكل دائري].

الحل:

إذا جارينا خيالنا المفرط لتصور الوضع فإننا سنعتقد أننا بحاجة إلى أميال عديدة من السلك الفولاذي لرفع سطح الأرض نصف بوصة. الحلّ الذي نقدمه هنا يبين الفرق بين الخيال والتفكير التحليلي. إننا لا نقلل من قيمة التخيل ولكن يمكن استخدامه فقط كمؤشر للحلِّ.

لنفرض أن R هو نصف قطر الأرض عند خط الاستواء مقاسًا بالقدم وأن المحيط هو C. عندئذ، $C = 2\pi R$. المطلوب هنا هو زيادة نصف القطر بمقدار قدم واحد. أي استبدال R بالمقدار $R' = R + 1$. لنفرض أن C' هو المحيط الجديد. إذن، $C' - C$ هو مقدار الفولاذ الذي يجب إضافته إلى الطوق ليكون 1 قدم أعلى سطح الأرض. من ذلك نجد أن:

$$C' = 2\pi R' = 2\pi(R+1) = 2\pi R + 2\pi$$

إذن، $C' - C = 2\pi$. ونخلص إلى أنه يلزمنا إضافة $2\pi \approx 6.28318$ قدمًا من الفولاذ لإنجاز المهمة. □

مسألة تحدي (٤، ٥، ٥)

تخيل أن سطح الأرض عبارة عن كرة تمت تغطيتها تماماً بقطعة كروية من البلاستيك. ما مساحة البلاستيك بالقدم المربع اللازمة إضافتها بحيث يصبح الغطاء البلاستيكي الكروي قدماً واحداً أعلى سطح الأرض؟ [اعتبر أن نصف قطر الكرة الأرضية يساوي 4000 ميل].

مسألة تحدي (٤، ٥، ٦) [هذه مسألة صعبة]

لنفرض أن V_N هو حجم كرة الوحدة $\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq 1\}$ في الفضاء الإقليدي. $\mathbb{R}^N$ (بعده N). أثبت أن $0 \rightarrow V_N$ عندما $N \rightarrow \infty$. هل يبقى ذلك صحيحاً للمساحة السطحية لكرة الوحدة في الفضاء $\mathbb{R}^N$ ؟

مسألة تحدي (٤، ٥، ٧) [هذه مسألة سهلة]

ليكن V_N كما في مسألة التحدي السابقة. فسر لماذا كلما ازدادت قيمة N يتمركز حجم كرة الوحدة أكثر فأكثر عن السطح الخارجي للكرة.

تمارين على الفصل الرابع

(١) حل مسائل الحساب المعماة التالية. في كل من هذه المسائل الحروف المختلفة تقابل أعدادًا صحيحة مختلفة والحروف المتشابهة تقابل عددًا صحيحًا واحدًا.

(أ)

```
   D O N A L D
 + R E R A L D
 -------------
   R O B E R T
```

(ب)

```
   W R O N G
 + W R O N G
 -----------
   R I G H T
```


(ج)

```
    S E V E N
 +  E I G H T
 ------------
  T W E L V E
```

(د)

```
   O N E
 + O N E
 -------
   T W O
```

(هـ)

```
     0 N E
 + F 0 U R
 ---------
   F I V E
```

(و)

$$\begin{array}{r} A\ \ B\ \ C \\ +\ D\ \ E\ \ F \\ \hline G\ \ H\ \ I \end{array}$$

(ز)

$$\begin{array}{r} G\ \ D\ \ A \\ +\ H\ \ E\ \ B \\ \hline I\ \ F\ \ C \end{array}$$

(ح) $(A\,B\,O\,M)^{1/2} = A + TO + M$

(ط) $AB \times CDE = FGHI$

(٢) في كل من مسائل الحساب المعماة التالية، كل حرف من الحروف X في الفقرة الواحدة يقابل خانة مختلفة (من الخانات 0، 1، 2، ...، 9). مطلوب أيضاً أن تكتشف العملية الحسابية في كل فقرة.

(أ)

$$\begin{array}{r} X\ \ X\ \ X \\ +\qquad\quad X\ \ X \\ \hline X\ \ X\ \ X\ \ X\ \ 1 \end{array}$$

(ب)

$$\begin{array}{r} X\ \ X\ \ 2 \\ +\qquad\quad X\ \ X \\ \hline X\ \ X\ \ X\ \ X\ \ X \end{array}$$

(ج)

$$\begin{array}{r} X\ \ X\ \ X \\ +\qquad\quad X\ \ X \\ \hline X\ \ X\ \ X\ \ 8\ \ X \end{array}$$

(د)

$$\begin{array}{r} 2\ X\ X \\ +\ \ \ X\ X \\ \hline X\ X\ X\ X \end{array}$$

(هـ)

$$\begin{array}{r} 6\ X\ X \\ +\ X\ X\ X \\ \hline X\ X\ X\ X \end{array}$$

(٣) هل يصادف أول السنة الميلادية يوم السبت أكثر من يوم الأحد أو يوم الأحد أكثر من يوم السبت ؟*

(٤) في أي يوم من أيام الأسبوع يقع الثلاثين من الشهر أكثر ما يمكن؟

(٥) تحتاج هذه اللعبة إلى لاعبين يتناوبان خطوات اللعبة، مائدة مستطيلة، عدد كاف من الفيش الدائرية المتطابقة. يتناوب اللاعبان بوضع الفيش على المائدة (فيشة واحدة في كل خطوة) بشرط ألا تتقاطع الفيش وألا تخرج أي فيشة عن حافة المائدة. اللاعب الفائز هو منْ يضع الفيشة الأخيرة. اقترح إستراتيجية يفوز فيها اللاعب الأول.

(٦) يوجد من بين ركاب القطار المتجه من نيويورك إلى واشنطن ثلاث ركاب أسمائهم: سميث و براون و بيتر. بمحض الصدفة كانت أسماء مهندس القطار وسائق القطار والنادل هي: سميث و براون و بيتر (ليس بالضرورة بهذا

---

* المترجمان: تتكون السنة الميلادية العادية من 52 أسبوعًا ويومًا واحدًا. أما السنة الكبيسة فتزيد يومًا واحدًا هو التاسع والعشرين من فبراير. جميع السنوات التي تقبل القسمة على 4 هي سنوات كبيسة ما عدا السنوات التي تقبل القسمة على 100 . في هذه الحالة تكون السنة كبيسة فقط إذا قبلت القسمة على 400 . فمثلاً 2100 ليست سنة كبيسة ولكن 2000 سنة كبيسة.

الترتيب). أيضًا تتوافر المعلومات التالية:

١. يسكن الراكب سميث في نيويورك.
٢. يسكن سائق القطار في مدينة تقع في منتصف الطريق بين نيويورك وواشنطن.
٣. الراكب الذي يحمل اسم السائق يسكن واشنطن.
٤. راتب الراكب الذي سكنه هو الأقرب إلى سكن السائق ثلاثة أمثال راتب السائق.
٥. الراكب براون يتقاضى 2000 دولار كراتب شهري.
٦. أحد أفراد طاقم القطار والذي يحمل اسم بيتر فاز مؤخرًا على النادل في كرة المضرب.

ما اسم المهندس ؟

(٧) [هذه المسألة مأخوذة من مجلة الرياضيات — Scripta Mathematica]

سرقت محفظة إحدى المدرسات في أحد الأيام الدراسية. ومن وحي ملفات طلاب المدرسة قررت إدارة المدرسة استجواب الطلاب: ليليان وجودي و ديفد وثيودور ومارجريت. صرح كل من هؤلاء الطلاب بالإجابات التالية ليليان: لم أسرق المحفظة. لم يسبق لي أن سرقت شيئًا. ثيودور هو السارق.

جودي: لم أسرق المحفظة. والدي من الأثرياء جدًا وأمتلك محفظتي الخاصة. مارجريت تعرف السارق.

ديفد: لم أسرق المحفظة. لم أكن على معرفة مسبقة لمارجريت قبل بداية العام الدراسي الحالي. السارق هو ثيودور.

ثيودور: لم أسرق المحفظة. السارقة هي مارجريت. كذبت ليليان عندما اتهمتني بسرقة المحفظة.

مارجريت: لم أسرق المحفظة. جودي هي السارقة. ديفد على استعداد للشهادة لصالحي لأنه يعرفني من سنوات عديدة.

بعد مداولات ومحاولات إقناع صعبة جداًّ، استطاعت إدارة المدرسة الحصول على اعتراف من كل الطلاب بأن جملتين من الجمل الثلاث التي صرح بها كل منهم صائبة والجملة الثالثة خاطئة. من السارق ؟

(٨) في المسائل الحسابية المعماة التالية، الحروف المتشابهة تقابل الخانة نفسها والحروف المختلفة تقابل خانات مختلفة و * يمكن أن تقابل أي خانة.

(أ)

```
          A  T  O  M
          A  T  O  M
      ----------------
        *  *  *  *  *
     *  *  *  *  *
  *  *  *  *  *
*ر  *  *  *ر  *
------------------------
          A  T  O  M
```

(ب)

```
       A  B  C
       B  A  C
     -----------
    *  *  *  *
    *  *  A
 *  *  *  B
 ---------------
 *  *  *  *  *  *
```

(ج)

$$DO + RE = MI$$
$$FA + SI = LA;$$
$$RE + SI + LA = SOL.$$

(٩) ثلاثة من أعضاء فرقة كشافة كانوا يتبادلون معلومات عن بعض من زملائهم. أخبرهم قائد فرقة الكشافة أن ثلاثة من زملائهم سيصلون غداً وأسماء عائلاتهم هي وينكن وبلنكن ونود. أما أسمائهم الأولى فهي بدر وسمير وسامي (ليست بالضرورة بهذا الترتيب). صرح أحد الأعضاء الثلاثة أنه كان يعتقد أن اسم عائلة بدر هو وينكن، ولكن قائد الفرقة أكد أن هذا ليس صحيحاً وقدم لهم بعض الإرشادات:

١. والد السيدة / نود هو أخ والدة سمير.
٢. دخل سمير المدرسة (الصف الأول) عندما كان عمره 7 سنوات. ولقد سمعته هذا العام يخبر أحد أصاحبه بأنه بدأ يدرس حساب الصف السادس.
٣. السيد/ بلنكن ومهنته جزار هو جد بدر.
٤. بلنكن يكبر سمير بعام واحد. بدر يكبر سمير بعام واحد.

قابل بين أسماء الأولاد وأسماء عائلاتهم وحدد أعمارهم.

(١٠) عندما يصبح عمري كعمر والدي الآن سأبلغ من العمر 5 أمثال عمر ابني الآن. ولكن في ذلك الوقت سيكون ابني أكبر مني الآن بثماني سنوات. مجموع عمري وعمر والدي الآن 100. ما عمر ابني؟

(١١) استبدل عقارب الساعات بعقارب الدقائق على ساعتك. كم عدد المرات المختلفة في اليوم الواحد التي تقرأ فيها الوقت الصائب؟

(١٢) ما أيام الأسبوع الممكنة التي تقع في أول يوم من أيام قرن؟

(١٣) الحركات القانونية للحصان (الفرس) في لعبة الشطرنج هي على شكل L : إما مربعان أفقيان ومربع واحد للأعلى أو الأسفل وإما مربع أفقي ومربعان للأعلى أو الأسفل. إذا بدأ الحصان في مربع الركن السفلي الأيسر من الرقعة فما عدد الحركات التي يحتاجها الحصان لزيارة كل من المربعات (عددها 64) مرة واحدة على الأقل؟

(١٤) وجدت فاتورة شراء ديوك حبش قديمة على أحد المكاتب:

72 ديك حبش $*67.9*$ $

حيث كانت الفاتورة ممزقة ومن ثم الخانة الأولى والأخيرة من الثمن غير واضحة (مثلنا كل من هذه الخانات بالعلامة $*$). ما هاتان الخانتان وما ثمن ديك الحبش الواحد (بعدد صحيح من الدولارات وعدد صحيح من السنتات) ؟

(١٥) استخدم قطع النقد من الفئات: 1 سنت، 5 سنتات، 10 سنتات، 25 سنتًا. كم عدد الطرق المختلفة للحصول على 50 سنتًا من هذه القطع؟ كم عدد الطرق المختلفة للحصول على دولار واحد؟ كم عدد الطرق المختلفة للحصول على k دولار؟

(١٦) أربعة أزواج مع زوجاتهم يجلسون على الشاطئ في يوم حار حيث شربوا عددًا كبيرًا من زجاجات المشروبات الغازية: السيدة/ سلمى شربت زجاجتين والسيدة/ هنية شربت 3 زجاجات والسيدة/ لوسي شربت 4 زجاجات والسيدة/ مريم شربت 5 زجاجات. شرب السيد/ محسن عددًا من الزجاجات يساوي العدد الذي شربته زوجته. شرب السيد/ أحمد ضعف العدد الذي شربته زوجته. شرب السيد/ إحسان ثلاثة أمثال العدد الذي شربته زوجته. شرب السيد/ حسين أربعة أمثال العدد الذي شربته زوجته. عدد الزجاجات الكلي الذي شربه جميع الأزواج والزوجات هو 44 زجاجة. من هو زوج كل من السيدات الأربعة؟

(١٧) سأل سامي صديقه أحمد "كم طفلاً لديك؟ وما أعمارهم؟" أجاب الصديق

"لدي 3 أولاد. حاصل ضرب أعمارهم 72 عامًا ومجموع أعمارهم هو رقم شارع البيت الذي أسكن فيه". بعد أن قرأ سامي رقم الشارع أجاب بأن المعلومات غير كافية لمعرفة أعمارهم. عندئذ قال الصديق "نعم"، لكني آمل أن يلعب ابني البكر في يوم من الأيام مع فريق $U.S.C$ لكرة القدم". ما أعمار الأولاد الثلاثة؟

(١٨) هل توجد إستراتيجية رابحة للاعب الأول في لعبة تك-تاك-تو (tic-tac-toe)* ؟ هل يمكن تعديل قواعد اللعبة لكي تحصل على مثل هذه الإستراتيجية؟

(١٩) بالرجوع إلى التمرين (١٨)، أثبت أنه إذا لم يضع اللاعب الأول علامته الأولى في مركز المربع فإن اللاعب الثاني يضمن التعادل.

(٢٠) بين لماذا يستخدم المتلاعبين (jugglers) 3 أو 5 كرات لتنفيذ خدعتهم في قذف الكرات في الهواء [نعني بالمتلاعب هنا الشخص الذي يقوم بقذف كرات في الهواء بحيث يقذف الكرة الأولى بيده اليسرى والثانية بيده اليمنى وهكذا. إذا قذفت الكرة باليد اليسرى فإنه يلتقطها باليد اليمنى والعكس صحيح]. ما دور النوعية هنا؟

(٢١) مسألة (أو مجموعة مسائل) البائع المتجول لها بعض صفات مسائل الألعاب ولكن لها تطبيقات مهمة في مجالات التجارة وتصميم الدارات والعديد من المواضيع الإنسانية الأخرى. وفي الآونة الأخيرة اكتشفت بعض التطبيقات في التحليل المركب.

بائع متجول ينطلق من المدينة التي يسكنها ليزور عدد k من المدن. تكلفة البقاء في كل من المدن وتكلفة السفر من مدينة إلى أخرى وتكلفة السفر من المدينة التي

---

* المترجمان: نحتاج للعبة تك-تاك-تو، مربعًا طول ضلعه 3 مقسمًا إلى 9 مربعات وحدة. يتناوب لاعبان الخطوات. الخطوة هي وضع علامة على أحد المربعات. اللاعب الذي يستطيع وضع 3 علامات أولاً على صف واحد أو عمود واحد أو أحد القطرين يكون هو الفائز.

يسكنها إلى أي مدينة ومن أي مدينة إلى المدينة التي يسكنها جميعها معلومة. المسألة هي إيجاد الطريق الأقل تكلفة التي يجب أن يسلكها البائع.

في الحقيقة لم يتمّ حل مسألة البائع المتجول تمامًا لحد الآن. لذا لن نسألك عن حل المسألة. ولكن المطلوب هنا إيجاد عدد الطرق المختلفة التي يستطيع أن يسلكها البائع المتجول بحيث يزور كل مدينة مرة واحدة فقط ومن ثم يعود لمدينته.

(٢٢) بالرجوع إلى التمرين رقم (٢١)، افرض أن المدن هي ثلاثة C_1، C_2، C_3 وأن تكلفة السفر من أو إلى C_1 أكثر من التكلفة من أو إلى C_2 و C_3. ما أفضل إستراتيجيات البائع المتجول؟

(٢٣) بالرجوع إلى التمرين رقم (٢١)، أكتب برنامج حاسب آلي مدخله تكاليف السفر إلى المدن المختلفة ومن ثم حساب أفضل الطرق.

(٢٤) يتناوب لاعبان اللعب في هذه اللعبة. يكتب اللاعب الأول عددًا صحيحًا موجبًا من بين الأعداد 1 إلى 10 ثم يقوم اللاعب الثاني باختيار عدد من بين الأعداد 1 إلى 10 ويجمعه مع عدد اللاعب الأول. الآن، يقوم اللاعب الأول باختيار عدد من بين الأعداد 1 إلى 10 ويكتب حاصل جمعه مع المجموع السابق وهكذا. الفائز هو من يختار العدد الأخير الذي يجعل المجموع يساوي 100. صمم إستراتيجية رابحة للاعب الأول وأخرى للاعب الثاني.

(٢٥) بعثت مؤخرًا رسالة بالبريد الإلكتروني لأحد أصدقائي المشهور باللعب على الكلام فكان رده: "لا استطيع أن أفشل في الاختلاف معك". اكتب جملة بسيطة تعطي معنى واضحًا لرده.

(٢٦) يجلس 10 أشخاص حول طاولة مستديرة. المطلوب توزيع مبلغ قيمته 10 دولارات عليهم بشرط أن يأخذ كل منهم متوسط المبلغ الذي يأخذه جاره. ما عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

(٢٧) جمال قبطان قارب كبير. عمره A وعدد أطفاله C وطول القارب l. لدينا المعلومات التالية:

(أ) $A \times C \times l = 32118$.

(ب) طول l عدة أقدام.

(ج) C هو مجموع عدد غير صفري من الأولاد وعدد غير صفري من البنات.

(د) $C < A < 100$.

جد جميع القيم الممكنة لكل من A، C، l.

(٢٨) وضع برادبوري (Bradbury) جميع المسائل الحسابية المعماة التالية. الحروف المتشابهة تقابل خانة واحدة والحروف المختلفة تقابل خانات مختلفة وعلامة * يمكن أن تكون أي خانة.

(أ)

```
              T  H  E
            _____________
 S  H  E  |  F  E  A  R  S
              *  *  *
            -------------
              *  *  *  *
              T  A  L  K
            -------------
                 *  *  *  *
                 *  *  *  *
               ------------
```


(ب)

```
             R  U  N
           ________________
 R  U  N  |  R  A  B  B  I  T
             *  *  *  *
           -------------
                *  *  *  *
                P  U  M  A
              -------------
                   *  *  *  *
                   G  R  A  B
                 -------------
                         *  *
```

(ج)

```
           G  U  M
G  U  M | B  U  B  B  L  E
           *  C  *  *
              *  L  *  *
                 *  U  *
                 *  *  E  *
                 *  *  *  *
```

(د)

```
        Y  E  S
        Y  E  S
     *  *  *  *

     S  O  R  T
  *  *  O  F
  S  Q  U  A  R  E
```

(هـ)

```
        C  A  N
        C  A  N
     *  *  *  *

     *  F  O  R
  *  *  *  *
  F  R  O  L  I  C
```

(و)

```
     E  R  R  O  R
              O  R
  *  *  *  A  *  *
*  *  *  *  *  *
M  I  S  T  A  K  E
```

(٢٩) من المعلوم أن عقارب الساعات ينطبق على عقارب الدقائق عندما تشير الساعة إلى الثانية عشر تماماً. ما الوقت التالي التي ينطبق عنده العقربان؟ ما الوقت بعد ذلك؟

(٣٠) تحقق الدالة الحقيقية f المعادلة:

$$f = (x + y) = f(x) + f(y).$$

إذا كان $f(1) = 1$ فما قيمة $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ؟

(٣١) حل المسألة الحسابية المعماة التي وضعها لانكاستر (Lancaster):

$$NUDE + NOT + RUDE + NOR = CRUDE.$$

(٣٢) حل المسالة الحسابية المعماة التي وضعها آلان وين (Alan Wayne):

$$AYE + AYE + AYE + AYE = YES + YES + YES.$$

(٣٣) قاربان متقابلان المسافة بينهما 20 ميلاً. بدأ القاربان في التحرك في اتجاه بعضهما البعض في اللحظة نفسها. القارب الأول يسير بسرعة 12 ميلاً في الساعة ويسير القارب الثاني بسرعة 17 ميلاً في الساعة. ما المسافة التي تكون بينهما قبل دقيقة واحدة من اصطدامهما؟ [فكر في هذه المسألة شفهيًّا حيث حلّها لن يستغرق أكثر من دقيقة].

(٣٤) خذ أي عدد مكون من ثلاث خانات. اكتبه على ورقه ثم اكتب الثلاث خانات مرة أخرى مجاورة للخانات الثلاث الأولى. وبهذا تحصل على عدد مكون من ست خانات، مثل العدد 479479 . قسم العدد المكون من ست خانات على العدد 7 . سترى أن العدد يقبل القسمة على 7 . اقسم الناتج الذي حصلت عليه على العدد 11 وسترى أنه يقبل القسمة على العدد 11 . اقسم الناتج الأخير على العدد 13 وسترى أنه يقبل القسمة على العدد 13 ويكون خارج القسمة هو العدد الأصلي المكون من ثلاث خانات. ما السبب وراء ذلك ؟

(٣٥) لدينا دورق من الماء ودورق من الحمض. يتسع كل من الدورقين للكمية نفسها من السائل وهناك مجال لإضافة سائل قليل لكل منهما. أضف القليل من الماء للحمض وامزجه جيدًا ثم أضف كمية من المزيج تساوي كمية الماء المضافة إلى دورق الماء. الآن، دورق الماء يحتوي على نسبة من الحمض ودورق الحمض يحتوي على نسبة من الماء. أي النسبتين أكبر ؟

(٣٦) بالرجوع إلى التمرين رقم (٣٥)، نفرض أنك استمريت في إضافة الكمية نفسها من السائل مرة للحمض ومرة للماء وخلط المزيج بعد كل إضافة. هل تصبح نسبة الحمض متساوية في كل من الدورقين بعد عدد منته من الإضافات ؟

(٣٧) ادعى الرياضي والفيلسوف الانجليزي المشهور بيرتراند راسل(Bertrand Russel) أنه هدر وقته في دراسة المنطق والرياضيات وذلك بسبب المسألة التالية: خذ قطعة من الورق واكتب على أحد جهتيها العبارة "العبارة المكتوبة على الجهة الأخرى من هذه الورقة خاطئة" اقلب الورقة واكتب على الجهة الأخرى العبارة السابقة نفسها. الآن، بين صواب وخطأ هاتين العبارتين.

(٣٨) جلس ثلاثة رجال في صف واحد وراء بعضهم البعض. بحيث يستطيع الرجل الجالس في الأخير رؤية الرجلين الجالسين أمامه. الرجل الأوسط يستطيع أن يرى فقط الرجل الجالس أمامه. والرجل الجالس في الأمام لا يستطيع رؤية أي من الرجلين الآخرين. أغمض الرجال الثلاثة أعينهم ثم وضعنا طاقية حمراء أو سوداء على رأس كل منهم. من المعلوم أن هذه الطواقي أخذناها من 3 طواقي حمراء وطاقيتين سوداء. بعد أن غطينا رؤوس الرجال بثلاث طواقي أخفينا الطاقيتين الباقيتين. الآن، سألنا الرجل الجالس في الخلف عن لون الطاقية التي وضعناها على رأسه وبعد إجابته عن السؤال، سألنا الرجل الجالس في الوسط السؤال نفسه وبعد أن تلقينا إجابته سألنا الرجل الجالس في الأمام السؤال نفسه. حلل هذه اللعبة تمامًا.

(٣٩) اعتاد الرياضي الهنجاري المشهور بول إيردوش (Paul Erdös)، انظر: [ETIEJ] القول: "عندما كان طفلاً، ادعى العلماء أن عمر الأرض هو 2 بليون عام والآن يدعي العلماء أن عمر الأرض هو 4 بليون عام. إذن، يجب أن يكون عمري 2 بليون عام". ما الخطأ في هذا التبرير ؟

(٤٠) عين الرياضي كاسبر غوفمان (Casper Goffman). انظر [GOF] عدداً لكل رياضي، سماه عدد إيردوش (انظر التمرين رقم ٣٩) ويتم حساب هذا العدد على النحو التالي:

عدد بول إيردوش يساوي 0. بعد ذلك، استمر استقرائياً. إذا شاركت في كتابة بحث مع رياضي يحمل عدد إيردوش $(k-1)$ فإنك ستحمل عدد أيردوش k. عدد إيردوش لمؤلف هذا الكتاب هو 1. ماذا يعني ذلك ؟ جد عدد إيردوش لرياضي تعرفه. ما أصغر عدد إيردوش لرياضي تعرفه؟

(٤١) رقعة مستطيلة طولها 8 وعرضها 4. قسمناها إلى 32 مربع وحدة. هل يمكن لحصان لعبة الشطرنج (يتحرك بخطوات على شكل L) أن يبدأ حركته عند أي من المربعات ويزور كل من المربعات مرة واحدة بالضبط ويعود إلى مكانه؟ [إرشاد: لون مربعات الرقعة بطريقة مفيدة].

(٤٢) بالعودة إلى التمرين (٤١) حيث الرقعة الآن مربعة طول ضلعها 7 ومقسمة إلى 49 مربع وحدة. هل من الممكن أن يبدأ الحصان بالتحرك من أي مربع بعدد من الحركات يساوي 49 بالضبط ويزور كل من المربعات ويعود إلى مكانه ؟

(٤٣) من عادات إحدى القبائل الإفريقية أن يحرك السكان رؤوسهم من اليسار إلى اليمين ليعني قول "نعم" (الحركة نفسها تعني في الولايات المتحدة الأمريكية قول "لا"). في الحقيقة هذه الحركة تستخدم من قبل هذه القبيلة فقط وغير مستخدمة من باقي القبائل الأخرى بهذا المعنى.

بينما كنت تتجول في إحدى غابات إفريقيا قابلت رجلاً واعتقدت أنه ينتمي

إلى تلك القبيلة. سألته فيما إذا كان ينتمي بالفعل إلى تلك القبيلة فأجابك بحركة من رأسه من اليسار إلى اليمين (ولم ينسب بكلمة واحدة). ما الذي يمكنك استنتاجه ؟ لماذا؟ هل تستطيع طرح سؤال على الرجل تكون إجابته بحركة من الرأس فقط ويمكنك من تحديد هوية هذا الرجل ؟

(٤٤) ثلاثة ممثلين هم جو و بوب وكيرلي. أحدهم يلعب دور بطولة دائمًا والثاني دور الشرير والثالث دور المعتوه (ليس بالضرورة بهذا الترتيب). طلب الشرير من الذي يلعب دور البطولة أن يشاركه التمثيل في مشروعه الحالي ولكن مَنْ يلعب دور البطولة تعاقد مع منتج فيلم ليمثل مع المعتوه. إن ذلك لا يزعج الشرير لأنه يعلم أن كلا الرجلين ممثلاً بارعًا. ولكن الشرير يحسد المعتوه لأن المعتوه يتقاضى أجرًا أعلى منه. إذا كان أجر بوب أعلى من أجر جو وكيرلي لم يتلق أي إجابة بوب فمن منهم يلعب دور البطولة ومن منهم يلعب دور الشرير ومن منهم يلعب دور المعتوه ؟

(٤٥) إحدى ألعاب القمار الشائعة في أستراليا لعبة تمسى "اثنان للأعلى". تلعب هذه اللعبة على النحو التالي: يقوم اللاعب "يسمى الرامي" بتحديد مبلغ الرهان. بعد ذلك يلقي الرامي قطعتي نقود في آن واحد. إذا كانت النتيجة صورتان فتسمى الرمية "صورتان" وإذا كانت النتيجة كتابتان فتسمى الرمية "كتابتان" وإذا كانت النتيجة صورة وكتابة فتسمى الرمية "خلاف". الهدف من اللعبة أن يحصل الرامي على ثلاث رميات "صورتان" متتالية دون الحصول على رمية "كتابتان" أو خمس رميات "خلاف" متتالية.

يستمر الرامي في اللعب حتى :

(i) تكون النتيجة إحدى الرميات "كتابتان" ويخسر أو

(ii) تكون نتيجة خمس رميات متتالية "خلاف" ويخسر أو

(iii) يحصل على ثلاث رميات متتالية "صورتان" ويكسب.

إذا كسب الرامي فيدفع له 7.5 دولار مقابل كل دولار دفعه ويستمر في اللعب. أما إذا خسر فإنه يخسر الرهان الذي دفعه. هل هذه لعبة عادلة ؟ وإذا لم تكن لعبة عادلة هل يمكن التعديل في عدد رميات "خلاف" لتصبح لعبة عادلة؟

(٤٦) تحتاج اللعبة التقليدية التالية إلى لاعبين ويتم تنفيذها على النحو التالي: يقوم اللاعبان وفي اللحظة نفسها برفع إصبع أو إصبعين أو ثلاثة أصابع. وفي الوقت نفسه، يعلن كل منهما عن عدد الأصابع التي يعتقد أن يكون اللاعب الآخر قد رفعها. إذا كان الاثنان على خطأ أو على صواب تكون نتيجة اللعبة تعادل. إذا أصاب أحدهما وأخطأ الآخر فإن اللاعب المخطئ يدفع للاعب الذي أصاب عددًا من الدولارات تساوي العدد الكلي للأصابع المرفوعة (مجموع الأصابع المرفوعة). ما أفضل الإستراتيجيات التي ستتبعها عند مشاركتك في هذه اللعبة؟

(٤٧) يشترك في لعبة البريدج (إحدى ألعاب الورق) أربعة لاعبين: يتم توزيع 13 ورقة لعب على كل منهم (مجموعة أوراق اللعب عددها 52). نقول: إن مجموعة أوراق لعب عددها 13 هي مجموعة ياربورو (نسبة إلى اللورد ياربورو (Yarborough) الذي اشتهر برهانه ضد حصول هذه المجموعة) إذا كانت جميع أوراقها تحمل الأعداد من 1 إلى 10 (أي أنها لا تحتوي صور). ما احتمال حصول لاعب واحد على الأقل من لاعبي البريدج على مجموعة ياربورو؟

(٤٨) تنقسم عجلة لعبة الروليت إلى 36 قسمًا لتستقر على أحدها كرة مرقمة بالأعداد من 1 إلى 36 . يتم تدوير العجلة في اتجاه معين ثم توضع الكرة داخل العجلة ويتم تدويرها في اتجاه معاكس لدوران العجلة. وبعد فترة ستقع الكرة عشوائيًا لتستقر على أحد الأقسام المرقمة من 1 إلى 36 . قبل

ذلك يكون اللاعب (أو أي عدد من اللاعبين) قد وضع نقوده ليراهن على أحد الأعداد. إذا افترضنا أن اللعبة عادلة ووقعت الكرة على العدد المراهن عليه أحد اللاعبين فما المبلغ الذي سيكسبه هذا اللاعب؟

18 عددًا من الأعداد ملونة باللون الأسود و 18 عددًا ملونة باللون الأحمر. إذا وقعت الكرة في لعبة عادلة على عدد لونه هو اللون الذي راهن عليه اللاعب فما قيمة المبلغ الذي سيكسبه هذا اللاعب؟

هدف نوادي القمار في مدينة لاس فيغاس هو الربح. لذا تمَّ تعديل جميع الألعاب في النوادي لصالح النادي. في وقت من الأوقات تم إضافة جزء إلى عجلة الروليت رقمه 0 ولونه أخضر. لكن أسلوب دفع النقود للاعب الفائز لم يتغير عن السابق. إلى أي درجة يؤثر ذلك على نتائج اللعبة لصالح النادي؟

لكن هذا لم يشبع جشع أصحاب النوادي لذا فإنهم أجروا تعديلاً جديدًا بإضافة قسم جديد يحمل العدد 00 واللون الأخضر مع بقاء الأسلوب القديم لدفع النقود للاعب الفائز. إلى أي درجة يؤثر ذلك في نتائج اللعبة لصالح النادي؟

(٤٩) يتم سحب أوراق لعبة اليانصيب الأصلية لولاية بنسلفانيا كان على النحو التالي:

يدفع اللاعب 50 سنتًا ويحصل على تذكرة مكتوبًا عليها عدد مكون من ست خانات. ليكن العدد "987654". في نهاية الأسبوع تقوم الولاية بسحب العدد الرابح عشوائيًّا. توزع الجوائز كالتالي:

50000 دولار إذا كان العدد 987654

2000 دولار إذا كان العدد 98765× أو ×87654

200 دولار إذا كان العدد 9876×× أو ××7654

40 دولارًا إذا كان العدد 987××× أو ×××654

هل توزيع النقود على هذا النحو عادلاً ؟ ما فرص فوزك بجائزة واحدة على الأقل في الأسبوع؟

(٥٠) تجرى الانتخابات الوطنية في الولايات المتحدة الأمريكية" في أول ثلاثاء بعد أول اثنين من شهر نوفمبر". ما أقرب تاريخ من شهر نوفمبر الذي تُجرَي فيه الانتخابات؟ ما أبعد تاريخ؟

الفصل الخامس

الرياضيات المسلية
Recreational Math

(١,٥) المربعات السحرية وأفكار ذات علاقة بينها
Magic Squares and Related Ideas

للمربع السحري العديد من الأنماط المختلفة، نبدأ بتقديم أسهل هذه الأنماط.

مسألة (١,١,٥)

يبين الشكل رقم (١٣٣) مربعًا طول ضلعه 3 مقسومًا إلى 9 مربعات وحدة. المطلوب هو وضع الأعداد من 1 إلى 9، في كل من المربعات بحيث يكون مجموع الأعداد في كل من الصفوف وكل من الأعمدة متساوٍ.

الحل:

لنفرض أن S هو مجموع الأعداد في كل من الصفوف والأعمدة. بما أن عدد الصفوف يساوي 3 فإن مجموع الأعداد في المربعات التسعة يساوي $3S$ وهذا يساوي مجموع الأعداد من 1 إلى 9. إذن:

$$3S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9$$

وباستخدام صيغة مجموع الأعداد المتتالية نجد أن:

$$3S = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

إذن، $S = 15$. من ذلك يكون المطلوب هو وضع الأعداد من 1 إلى 9 بحيث يكون مجموع كل صف ومجموع كل عمود يساوي 15.

في الغالب يكون من الأفضل البدء بقيمة كبيرة. لذا نضع 9 في المركز. إن ذلك سيضع قيودًا كبيرة للعددين على يمين ويسار 9 وعلى العددين أعلى

وأسفل 9 . الخيارات المتاحة هي 5 + 1 أو 4 + 2 أو 3 + 3 . الخيار الثالث مرفوض لأنه غير مسموح بتكرار أعداد المربعات. لذا نضع 4 و 2 على يسار ويمين العدد 9 ونضع 5 و 1 أعلى وأسفل العدد 9 . الشكل رقم (١٣٤) يبين هذا الوضع.



شكل رقم (١٣٣)

	5	
4	9	2
	1	

شكل رقم (١٣٤)

الآن، لا يمكن أن نضع 3 في الصف السفلي لأن 3 + 1 عدد صغير حيث لا يمكن إيجاد عدد ثالث ليكون المجموع يساوي 15 . لذا نضع 3 في الصف العلوي وليكن المربع في الركن العلوي الأيسر. هذا يجعل الخيار الوحيد لعدد مربع الركن العلوي الأيمن هو العدد 7 ، ومن ثم يجب وضع العدد 6 في الركن السفلي الأيمن والعدد 8 في الركن السفلي الأيسر.

بإيجاد مجموع كل من الصفوف والأعمدة نجد أننا نجحنا في إنشاء أول مربع سحري. □

المربعات السحرية الأفضل هي المربعات التي ليس فقط مجموع الصفوف والأعمدة فيها متساوٍ ، لكن أيضًا المربعات التي يكون فيها مجموع أعداد كل من القطرين يساوي مجموع كل من الصفوف والأعمدة. الشكل رقم (١٣٥) يقدم مثالاً على مربع سحري من النوع 3×3 ويحقق أيضًا هذا الشرط الإضافي.

8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

شكل رقم (١٣٥)

3	5	7

3	5	7
4	9	2
8	1	6

شكل رقم (١٣٦)

كيف يمكن إيجاد مثل هذه المربعات؟ إحدى الطرق تكون بالتجريب. فبدلاً من أن نضع العدد 9 في المركز نضع عددًا مختلفًا في المركز ومن ثم محاولة إنشاء المربع كما في المسألة السابقة. عدد الأعداد التي سنجرب وضعها في المركز هو تسع أعداد وهذا ليس بالعدد الكبير حيث لا تستغرق المحاولات وقتًا كبيرًا قبل اكتشاف المربع المطلوب.

ولكن عندما تكون المربعات أكبر من 3×3، مثل 4×4 أو 5×5 أو 6×6 فإن التجريب يصبح مزعجًا، لذا يكون من الأفضل إيجاد إستراتيجية لإنشاء مثل هذه المربعات السحرية. نبدأ ببعض الملاحظات. في بعض الأحيان، عند عدم معرفتنا الطريق التي سنسلكها يكون من المناسب أن نتعلّم من المعلومات المتوافرة لدينا.

لذا نبدأ بالمربع السحري الذي أنشأناه في الشكل رقم (١٣٥). لنفرض أننا قمنا بإزاحة كل من الأعداد مربعًا إلى الأعلى (بالاتجاه الرأسي). عندئذ، سيفرغ الصف السفلي وستخرج أعداد الصف العلوي خارج المربع. لذا نضعها في الصف السفلي كما هو مبين في الشكل رقم (١٣٥).

لاحظ أننا سنحصل على مربع سحري جديد مجموع صفوفه وأعمدته يساوي 15 وهذا ليس مفاجئًا لأننا لم نقم بتغيير الصفوف (فقط حركناهم) أما الأعمدة فقمنا بتغيير أعداد العمود الواحد لكنها بقيت في العمود نفسه.

بصورة مماثلة يمكن إزاحة كل من الأعداد مربعًا إلى اليمين وينتج عن ذلك تفريغ العمود الأيسر وإخراج أعداد العمود الأيمن خارج المربع وبإعادتها إلى العمود الأيسر سنحصل على مربع سحري جديد. جرب ذلك وتحقق من أنك ستحصل على المجموع السحري 15.

بعد نجاحنا في التجربتين السابقتين نحاول الآن عمل إزاحة قطرية للمربع السحري الذي حصلنا عليه في الشكل رقم (١٣٦). ويبين الشكل رقم (١٣٧) المربع بعد

إنهاء ذلك. امسك قلمًا وتتبع معنا. سنقوم بإزاحة كل من أعداد الشكل رقم (١٣٦) مربعًا إلى اليمين ومربعًا للأعلى. لتسهيل رؤية ذلك دعنا نرمز لمربعات الصف الأول بالرموز a_{11}, a_{12}, a_{13} ولمربعات الصف الثاني بالرموز a_{21}, a_{22}, a_{23} ولمربعات الصف الثالث بالرموز a_{31}, a_{32}, a_{33}. نقوم بإزاحة الأعداد الواضحة أولاً:

$$4 \to a_{12}$$
$$9 \to a_{13}$$
$$8 \to a_{22}$$
$$1 \to a_{23}$$

نعود الآن إلى الأعداد الأخرى. ولتسهيل ذلك، دعنا نفترض أن الضلع الأعلى والضلع الأسفل متطابقان (أي أن مربعات الصف الأعلى تجاور مربعات الصف الأسفل) وأن الضلع الأيسر والضلع الأيمن متطابقان. إن هذا يسهل علينا رؤية الإزاحات من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل.

إذا أزحنا العدد 3 مربعًا إلى اليمين ومربعًا إلى الأعلى فإنه سيخرج خارج المربع، لكن إذا اعتبرنا أن الضلع الأعلى يتطابق مع الضلع الأسفل فإننا سنضع 3 في المربع a_{32}. وبالمثل، نضع 5 في المربع a_{33}، 2 في المربع a_{11}، 6 في المربع a_{21}. ويبقى لدينا العدد 7 الذي سيكون مكانه الوحيد هو المربع a_{31}.

بنظرة سريعة على المربع الناتج في الشكل رقم (١٣٧) نجد أنه مربع سحري.

اكتشفنا لحد الآن أن الإزاحات من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل والإزاحات القطرية تحافظ على المربع السحري. هل توجد فكرة عامة وراء هذه التماثلات؟

خذ ورقة مربعة ثم استخدم لاصق لإلصاق الحافتين اليسرى واليمنى. إذا وجدت صعوبة في تخيل ذلك جربها بنفسك وستحصل نتيجة لذلك أسطوانة. بعد ذلك حاول لصق الحافتين العليا والسفلى (من الممكن أن يكون ذلك صعبًا بعض

الشيء لكن يمكن إنجازه). ستحصل الآن على سطح كعكة دونات أو ما يسمى طارة بلغة الرياضيات. سنرى أن الإزاحات التي سبق وأن قمنا بها (وهي إزاحة من اليسار إلى اليمين وإزاحة من الأعلى إلى الأسفل وإزاحة القطرين) ستأخذ مسارًا طبيعيًّا على الطارة.

إذا حركنا كل من المربعات على الطارة مربعًا واحدًا إلى اليمين فإننا لم نعد بحاجة إلى إعارة اهتمام للعبارة "سيخرج المربع خارج الحافة" لأننا قمنا بحذف هذه الحدود عندما طابقنا حافة المربع اليسرى مع الحافة اليمنى. وبالمثل، عند تحريك المربع مربعًا واحدًا للأعلى. وأخيرًا، نجد أن الإزاحة القطرية ستصبح أقل غموضًا عند التعامل منها على سطح طارة.

ولهذا نستطيع القول: إن الطارة هي المكان الطبيعي لإنشاء المربعات السحرية. بما أننا نستطيع الإزاحة من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل وعلى القطرين فإن المربع الذي نبدأ به لإنشاء المربع السحري لم يعد مهمًا حيث نستطيع أن نبدأ بأي مربع. دعنا الآن نقوم بقص الطارة باستخدام مقص لنحصل على المربع الأصلي (انظر: رقم شكل ١٣٨).

2	4	9
6	8	1
7	3	5

شكل رقم (١٣٧)

	1	

شكل رقم (١٣٨)

نقوم الآن بإنشاء مربع سحري من النوع 3×3 بأن نبدأ بوضع 1 في المربع a_{12} . بما أن عدد الصفوف يساوي 3 وعدد الأعمدة يساوي 3 فإن الدورة الطبيعية لهذه المسألة هي 3 . ولذا نضع 1،2،3 قطريًّا (لاحظ أن وضع 1،2،3 في صف واحد أو عمود واحد لن يجدي لأننا لن نحصل على المجموع السحري 15). وبأخذ تركيب الطارة بعين الاعتبار نحصل على الشكل رقم (١٣٩).

	1	
3		
		2

شكل رقم (١٣٩)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

شكل رقم (١٤٠)

نستخدم الآن الدورة. وضعنا $1,2,3$ قطريًّا بالتحريك إلى الأعلى واليمين. الآن، نركز اهتمامنا على الأقطار التي تتحرك إلى الأعلى واليسار. سنضع على هذه الأقطار أعدادًا باستخدام الدورة 3. وضعنا 1 على a_{12}، لذا نضع 4 على a_{31} و 7 على a_{23}. بعد ذلك نبدأ من 2 على a_{33} ونضع 5 على a_{22} ثم 8 على a_{11}. وأخيرًا، نبدأ بالعدد 3 على a_{21} ونضع 6 على a_{13} ومن ثم 9 على a_{32}.

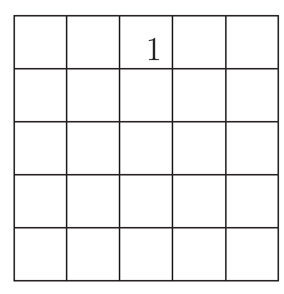
إن ما قمنا به صائب هندسيًّا حيث وضعنا الأعداد في المربعات وصائب من وجهة النظر العددية حيث استخدمنا جميع الأعداد من 1 إلى 9 وصائب من وجهة نظر النوعية حيث استخدمنا الدورة 3 في حلِّ المسألة. ولكن الأهم من ذلك أننا أنشأنا مربعًا سحريًّا (انظر: الشكل رقم ١٤٠). في الحقيقة، المربع السحري الذي أنشأناه هو مربع سحري خاص حيث مجموع كل من القطرين يساوي 15.

مسألة (٢,١,٥)

استخدم طريقة مماثلة للطريقة المقدمة أعلاه لإنشاء مربع سحري من النوع 5×5.

الحل:

دعنا نحاكي الطريقة التي أنشأنا فيها المربع السحري من النوع 3×3 من دون الخوض في تفاصيل الخطوات. نبدأ بالشكل رقم (١٤١). لدينا مربع من النوع 5×5 ووضعنا 1 في المربع a_{13} (مركز الصف الأول). الآن، نضع الأعداد $1,2,3,4,5$ قطريًّا بالتحرك للأعلى ثم اليمين لنحصل على الشكل رقم (١٤٢).



شكل رقم (١٤١)

		1		
	5			
4				
				3
			2	



شكل رقم (١٤٢)

نقوم الآن بوضع الأعداد قطريًّا بالتحرك للأعلى ثم اليسار (بدورة طولها 5).

على سبيل المثال، نبدأ بالعدد 1 على a_{13} ثم نضع 6 على a_{52} ثم نضع 11 على a_{41} ثم نضع 16 على a_{35} وأخيرًا نضع 21 على a_{24} . نكمل الأقطار المتخالفة البقية بالأسلوب نفسه لنحصل على المربع السحري المبين في الشكل رقم (١٤٣).

10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
23	6	19	2	15

شكل رقم (١٤٣)

يمكن التأكد من أن هذا المربع هو مربع سحري مجموعه السحري يساوي 65 (لاحظ أنه ليس خاصًا لأن مجموع كل من القطرين لا يساوي 65). □

مسألة تحدي (٥,١,٣)

استخدم الخوارزمية التي بيناها أعلاه لملأ مربع من النوع 3×3 أو 5×5 على أن تبدأ بوضع عدد في أي مربع مختلف عن مركز الصف العلوي. هل سيكون المربع المنشأ هو مربع سحري؟ هل فاجأتك النتيجة؟

مسألة تحدي (٤,١,٥)

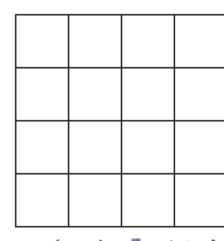
استخدم الخوارزمية السابقة لمربع من النوع 4×4 . من أين تبدأ؟ لماذا ستفشل هذه الخوارزمية؟ [فكر في الطارة وأجب إجابة هندسية]. ما التعديل اللازم إجراؤه على الخوارزمية بحيث تنجح في الحصول على مربع سحري من النوع 4×4 ؟

تحتاج خوارزميات إنشاء مربعات سحرية أطوالها أعداد زوجية إلى تقنية مختلفة عن التي قدمناها للأطوال الفردية، فهي في واقع الأمر تعتمد على نوعية طول الضلع (على الرغم أنه زوجي). على سبيل المثال، طريقة إنشاء مربعات سحرية أطوال أضلاعها مضاعفات للعدد 4 تختلف عن طريقة إنشاء مربعات سحرية من الطول 6 .

وبما أن موضوع هذا الكتاب ليس المربعات السحرية فإننا لن نقدم هذه الخوارزميات وندعو القارئ المهتم للرجوع إلى [SIM1] لمزيد من التفاصيل عن هذا الموضوع.

ننهي هذا البند ببعض الملاحظات عن المربعات السحرية التي أطوال أضلاعها مضاعفات العدد 4 . الشكل رقم (١٤٤) يبين لنا مربعًا من النوع 4×4 . ضع الأعداد من 1 إلى 16 في المربعات بالترتيب الاعتيادي: 1 إلى 4 في الصف الأول، 5 إلى 8 في الصف الثاني، وهكذا (انظر: شكل رقم ١٤٥). المربع الناتج ليس سحريًّا! الآن، قم باستبدال كل عدد من أعداد مربعات القطرين بالعدد المتمم له (يعني بالعدد المتمم للعدد a هو العدد الذي إذا أضيف إلى a يكون المجموع 17 . فمثلاً متمم 6 هو 11 ومتمم 13 هو 4 . لاحظ أن المسافة من 1 إلى 6 تساوي المسافة من 11 إلى 16 . وبهذا قلنا إن 6 و 11 متتامان).

بعد إتمام التبديلات جميعًا نحصل على مربع سحري (انظر: الشكل رقم ١٤٦).



شكل رقم (١٤٤)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

شكل رقم (١٤٥)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

شكل رقم (١٤٦)

مسألة تحدي (٥,١,٥)

اتبع الطريقة المقدمة للمربع 4×4 لإنشاء مربع سحري من النوع 8×8 [إرشاد: قسم المربع من النوع 8×8 إلى أربع مربعات كل منها من النوع 4×4 ومن ثم استخدم طريقة الإنشاء السابقة على كل من المربعات من النوع 4×4].

مسألة تحدي (٦,١,٥)

ما السبب وراء نجاح طريقة إنشاء مربع سحري من النوع 4×4 ومن النوع 8×8؟

استمر اعتقاد استحالة إنشاء مربع سحري من النوع 10×10 لمدة تزيد على 180 عامًا، لكننا نجحنا أخيرًا في إنشاء مثل هذا المربع. هل تستطيع إنشاء هذا المربع؟

(٥,٢) مســــــــــائل أوزان
Problems Involving Weighings

نبدأ بمسألة مجموعة أشياء تبدو أنها متساوية ولكنها في الواقع مختلفة.

مسألة (١,٢,٥)

لدينا 9 حبات من اللؤلؤ. تبدو جميعها متشابهة ولكن 8 منها لها الوزن نفسه والتاسعة وزنها مختلف، وهي إما أخف أو أثقل من الثمانية (ولكننا لا نعلم أهي أخف أم أثقل). وسيلة الوزن الوحيدة التي نملكها هي ميزان ذو كفتين (انظر: الشكل رقم ١٤٧).



شكل رقم (١٤٧)

كيف يمكن استخدام الميزان لمعرفة حبة اللؤلؤ المختلفة بثلاث وزنات فقط؟

الحل:

لاحظ أولاً أن مقارنة وزن حبة لؤلؤ مع حبة أخرى طريقة عديمة الجدوى. إذا كانا غير متساويين في الوزن فما الذي يمكن استنتاجه؟ إحداهما هي اللؤلؤ المختلفة ولكن أيهما؟ أما إذا كانا متساويين في الوزن فإن اللؤلؤة المختلفة ليست بينهما، وبهذا فهي من بين السبع حبات الباقية. إن هذا يضمن لنا وجود حبتين نستخدمهما للمقارنة، ولكن لا نستطيع استخدام الميزان لأكثر من ذلك. إذن، ما الذي يجب علينا عمله؟ بإمكاننا استخدام عدد الوزنات المحدود بطريقة أكثر فاعلية؛ وذلك بتقسيم حبات اللؤلؤ إلى ثلاث مجموعات تتكون كل منها من ثلاث حبات. من الواضح أن السبب وراء اختيارنا العدد 3 هو كونه العدد الوحيد (غير 1 و 9) الذي يقسم العدد 9. نعتبر الآن أن مجموعة حبات اللؤلؤ التي عددها 3 هي "حبة كبيرة". لنفرض إذن، أن هذه المجموعات هي G_1 و G_2 و G_3. الآن، نقوم بمقارنة وزني G_1 و G_2 ونحصل على الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى: وزن G_1 يساوي وزن G_2. في هذه الحالة تكون حبات المجموعتين G_1 و G_2 متساوية الأوزان والحبة المختلفة تنتمي إلى المجموعة G_3.

الحالة الثانية: وزن G_1 لا يساوي وزن G_2. في هذه الحالة الحبات تنتمي إلى G_3 متساوية الأوزان والحبة ذات الوزن المختلف تنتمي إلى G_1 أو G_2.

لاحظ أننا استخدمنا وزنة واحدة لحد الآن. ندرس الآن الحالتين كل على حدة.

الحالة الأولى: نقارن بين وزني G_1 و G_3. نعلّم مسبقًا أن الوزنين مختلفين، لذا فإما أن تكون G_3 أثقل من G_1 أو أخف منها. وللسهولة دعنا نعتبر أن G_3 أثقل من G_1. إن هذا يعني أن حبة اللؤلؤ المختلفة أثقل من الحبات الباقية وتنتمي إلى G_3. الآن، للوزنة الثالثة نختار أي حبتين من حبات G_3 ونقارن وزنيهما. إذا كان الوزنان متساويين فإن الحبة الثالثة من G_3 هي المختلفة والأثقل. إذا كان الوزنان مختلفين

فالحبة الأثقل من بينهما هي المختلفة ونكون قد انتهينا.

الحالة الثانية: لنفرض لغرض السهولة أن G_1 أثقل من G_2. استخدم الوزنة الثانية لمقارنة وزني G_1 و G_3. إذا تساووا وزناهما فإن حبة اللؤلؤ المختلفة تنتمي إلى G_2 وهي أخف من البقية. الآن، قارن بين وزني أي حبتين من G_2. إذا تساووا وزناهما فإن الحبة الثالثة من G_2 هي المختلفة والأخف. أما إذا اختلف وزناهما فالحبة الأخف من بينهما هي المختلفة.

أما إذا اختلف وزن G_1 عن وزن G_3 فإن G_1 يجب أن تكون أثقل من G_3 (لأنها لو كانت أخف فإننا نحصل على ثلاث حبات أوزانها مختلفة وهذا مستحيل). وبهذا فإن الحبة المختلفة تنتمي إلى G_1 وهي الأثقل. الآن، في الوزنة الثالثة نقارن بين وزن حبتين من G_1. إذا كان الوزنان متساويين فالحبة الثالثة من G_1 هي المختلفة وهي الأثقل، أما إذا كان الوزنان مختلفين فالحبة الأثقل من بينهما هي المختلفة. □

لاحظ أننا بعد أن قررنا أن الإستراتيجية الأفضل هي تقسيم الحبات التسع إلى ثلاث مجموعات متساوية العدد فإن خطوات الحلّ بعد ذلك روتينية. ولكن لو فرضنا أننا قسمنا الحبات إلى ثلاث مجموعات من النوع $\{2,2,5\}$ أو النوع $\{4,4,1\}$ فإننا لن ننجح بعد الخطوة الأولى.

مسألة (٢,٢,٥)

لنفرض الآن أن لدينا 12 حبة لؤلؤ جميعها متشابهة شكلاً، لكن وزن إحداهما مختلف عن أوزان الحبات الباقية، ويمكن أن تكون أثقل أو أخف. كم عدد الوزنات اللازمة لمعرفة الحبة المختلفة؟

الحل:

عدد الوزنات الذي وجدناه في المسألة (١,٢,٥) يبدو أنه أصغر عدد ممكن، وهو في الحقيقة كذلك. ولهذا لكي ننجح بتحديد اللؤلؤة المختلفة من بين 12 حبة لؤلؤ

باستخدام ثلاث وزنات فقط فإننا نحتاج إلى فكرة جديدة.

نبدأ باستخدام فكرة " اللؤلؤة الكبيرة " وذلك بتقسيم حبات اللؤلؤ إلى ثلاث مجموعات G_1 و G_2 و G_3 تحتوي كل منها على 4 حبات. ثم نقوم بمقارنة وزن G_1 مع وزن G_2 ونحصل على الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: إذا كان وزن G_1 مساويًا لوزن G_2 فإن حبات G_1 و G_2 الثمانية متشابهة وتكون الحبة المختلفة من بين حبات G_3 .

الحالة الثانية: إذا اختلف وزن G_1 عن وزن G_2 فإن الحبة المختلفة من بين حباتهما الثمانية وأن حبات G_3 الأربعة متشابهة.

ندرس كل من الحالتين على حدة.

نأخذ في الحالة الأولى (هي السهلة نسبيًا) أي ثلاث حبات من G_1 ونقارن وزنهما معًا مع وزن أي ثلاث حبات من G_3 (هذه وزنة ثانية). إذا تساوى الوزنان فإن الحبة المختلفة هي الرابعة من G_3 . نقوم الآن بوزن الحبة الرابعة من G_3 مع أحد حبات G_1 ونستنتج فيما إذا كانت الحبة المختلفة أثقل أم أخف وننتهي بثلاث وزنات.

أما إذ اختلف وزن حبات G_1 الثلاثة عن وزن حبات G_3 الثلاثة فإن الحبة المختلفة هي إحدى حبات G_3 التي اخترناها وسنعلم أيضًا أنها أخف أم أثقل لأن حبات G_1 متشابهة. وأخيرًا وزنة ثالثة لحبتين من حبات G_3 الثلاثة المختارة ستتحد أي الحبات هي المختلفة.

لدراسة الحالة الثانية نفرض لغرض السهولة أن G_1 أثقل من G_2 ولنفرض أن $G_1 = \{a, b, c, d\}$ وأن $G_2 = \{a', b', c', d'\}$. الوزنة الثانية تكون بمقارنة وزن $\{a, b, a'\}$ مع وزن $\{c, d, b'\}$. عندئذ:

(أ) إذا تساوا الوزنان فإن الحبة المختلفة هي من بين الحبتين c' و d' اللتين لم تستخدما في الوزنة الثانية، وبما أن G_2 أخف من G_1 فإن الحبة المختلفة

أخف. الوزنة الثالثة، هي الآن مقارنة وزني c' و d' وتكون الحبة المختلفة هي الأخف من بينهما.

(ب) إذا اختلف الوزنان (لتكن $\{a, b, a'\}$ أثقل) فإن هذا يعني أن a', d, c حبات أوزانها متساوية والحبة المختلفة هي من بين الحبات b', b, a. وللوزنة الثالثة نقارن بين وزني b و a. إذا تساوى الوزنان فإن الحبة المختلفة هي b' وهي الأخف. أما إذا اختلف الوزنان فإن الحبة المختلفة هي الأثقل من بينهما (لأنها ينتميان إلى G_1).

(ج) الحالة التي تكون فيها $\{c, d.b'\}$ أثقل مشابهة للحالة (ب). □

مسألة تحدي (٣,٢,٥)

أثبت أن ثلاث وزنات كافية لتحديد حبة اللؤلؤ المختلفة من بين 13 حبة، لكن من دون معرفة فيما إذا كانت أخف أو أثقل.

مسألة تحدي (٤,٢,٥)

أثبت أن ثلاث وزنات ليست كافية لتحديد حبة اللؤلؤ المختلفة من بين 14 حبة.

مسألة (٥,٢,٥)

من بين 80 حبة لؤلؤ واحدة فقط أخف من الحبات الباقية. جد الحبة المختلفة باستخدام أربع وزنات على ميزان ذو كفتين.

الحل:

الوضع الطبيعي لحل هذه المسألة هو تقسيم حبات اللؤلؤ إلى مجموعتين تحتوي كل منهما على 40 حبة ثم مقارنة الوزنين. المجموعة الأخف تحتوي الحبة المختلفة. الآن، قسم هذه المجموعة إلى مجموعتين تحتوي كل منهما على 20 حبة ثم قارن وزنيهما. المجموعة الأخف هي التي تحتوي حبة اللؤلؤ المختلفة وهكذا.

المشكلة التي سنواجهها في هذه الإستراتيجية هي أن بعد الوزنة الرابعة سيبقى لدينا 5 حبات لؤلؤ ولن نستطيع تحديد المختلفة من بينها. ما الخطأ الذي وقعنا فيه؟ الخطأ هو أننا لم نستفد تماماً من أن الحبة المختلفة هي الأخف. لذا نبدأ بتقسيم حبات اللؤلؤ إلى ثلاث مجموعات أعدادها $26, 27, 27$.

نقوم بمقارنة وزن المجموعة 27 مع وزن المجموعة 27 الأخرى. إذا تساوى الوزنان فإن الحبة المختلفة هي من بين حبات المجموعة 26 وهي الأخف، وإذا اختلف الوزنان فإن الحبة المختلفة تنتمي إلى مجموعة الوزن الأخف منها. لاحظ أننا استخدمنا وزنة واحدة فقط لمعرفة فيما إذا كانت الحبة المختلفة هي من بين مجموعة تحتوي 26 حبة أو من بين مجموعة تحتوي 27 حبة (لأننا استخدمنا بحكمة معرفة أنها الأخف).

إذا كانت الحبة الأخف من بين المجموعة التي تحتوي 26 حبة لؤلؤ فإننا نقسم هذه المجموعة إلى ثلاث مجموعات أعدادها $8, 9, 9$. نقوم بمقارنة وزن المجموعة 9 مع المجموعة الأخرى 9. وهكذا. عندئذ، سنرى أننا نستطيع تخفيض 9 إلى 3 ومن ثم نحصل على الحل.

إذا كانت الحبة الأخف تنتمي إلى المجموعة المكونة من 27 حبة فإننا نقوم بتقسيمها إلى ثلاث مجموعات أعدادها $9, 9, 9$. نقارن بين وزن مجموعتين منهما. إذا تساوى الوزنان فإن الحبة الأخف تنتمي إلى المجموعة الثالثة وإذا اختلف الوزنان فالحبة تنتمي إلى المجموعة الأخف بينهما. بعد ذلك نخفض العدد إلى 3 ومن ثم نجد الحل.□

مسألة (٦،٢،٥)

لدينا 24 بلية تبدو جميعاً متشابهة، لكن في حقيقة الأمر أن بعض منها مصنوع من الزجاج والبعض الآخر مصنوع من الكوارتز(زجاج المرْو). البليات المصنوعة من الزجاج أثقل من لك المصنوعة من الكوارتز. جميع أوزان البليات الزجاجية متساوية، وجميع أوزان البليات المصنوعة من الكوارتز متساوية. كم عدد الوزنات

اللازمة لتحديد عدد البليات الزجاجية وعدد البليات المصنوعة من الكوارتز باستخدام ميزان ذو كفتين؟

الحل:

إحدى طرق حل هذه المسألة يكون بتحديد إحدى البليات لاستخدامها "بلية اختبار" ثم القيام بمقارنة وزن كل من البليات الأخرى مع وزن بلية الاختبار. لنفرض أن البلية k هي أول بلية وزنها مختلف عن وزن بلية الاختبار. إذا كانت البلية k أثقل من بلية الاختبار فإن البلية k مصنوعة من الزجاج. وبهذا تكون بلية الاختبار والبليات التي تمت مقارنة أوزانها سابقًا (عددها $k-1$) مصنوعة جميعًا من الكوارتز. بعد نقارن أوزان البليات $k+1$، $k+2$، ... على التوالي مع وزن بلية الاختبار ونستنتج أن الأثقل منها مصنوعة من الزجاج والتي وزنها يساوي وزن بلية الاختبار مصنوعة من الكوارتز. وبهذا نكون قد وجدنا عدد البليات الزجاجية وعدد البليات المصنوعة من الكوارتز باستخدام 23 وزنة (لا نحتاج لمقارنة وزن بلية الاختبار مع نفسها. في الحقيقة هذا غير ممكن). لاحظ أنه لو كان وزن أول بلية مختلفة أخف من وزن بلية الاختبار فإنها بكل بساطة ستكون مصنوعة من الكوارتز و أن بلية الاختبار والبليات التي سبقت ذلك مصنوعة من الزجاج. وبعد ذلك نستمر كما في السابق.

الحل الذي قدمناه هنا لا يحتاج إلى خيال واسع ولا يحتوي أيضًا على فكرة ذات قيمة. ولذا فالمسألة هنا هي: هل نستطيع إيجاد خوارزمية أكثر فاعلية؟ نبدأ كما في السابق باختيار بليتين ومقارنة وزنيهما. لدينا الحالتان التاليتان:

(١) **الوزنان مختلفان:** في هذه الحالة البلية الأخف مصنوعة من الكوارتز والبلية الأثقل مصنوعة من الزجاج. الآن، ضع هاتين البليتين في إحدى كفتي الميزان ثم اختر بليتين وضعهما في الكفة الأخرى. إذا كان وزن البليتين أثقل فإنهما مصنوعتان من الزجاج وإذا كان وزنهما أخف فإنهما مصنوعتان من الكوارتز وإذا تعادل وزنهما مع وزن بليتي الكفة الأخرى فأحدهما مصنوعة من الزجاج والأخرى

مصنوعة من الكوارتز. في كل من الخيارات الثلاث السابقة نستطيع إيجاد عدد البليات المصنوعة من الزجاج وعدد البليات المصنوعة من الكوارتز (لاحظ أن المطلوب معرفة العدد فقط وليس تحديد نوع البلية). نضع هاتين البليتين جانبًا ونسجل عدد كل نوع. بعد ذلك نكرر الخطوة السابقة بوضع بليتين جديدتين في الكفة الأخرى ونستمر على هذا المنوال. بهذا نجد أن عدد الوزنات التي احتجنا إليها لإنهاء المهمة هو $1+\frac{22}{2}=12$ وزنة. أفضل من السابق!

(٢) الوزنان متساويان: في هذه الحالة إما أن البليتين من الزجاج وإما أنهما من الكوارتز. وكما في الحالة (١) نستخدمهما كبليات اختبار. نختار زوج آخر من البليات ونضعهما في الكفة الأخرى. وإذا تساوى الوزنان فنرى أنهما من نفس نوع البليتين السابقتين (إما أنهما زجاج أو أنهما كوارتز) لكننا لا نستطيع تحديد هذا النوع. استمر على ذلك حتى تحصل على زوج من البليات وزنهما مختلف عن زوج الاختبار. لنفرض أن أول زوج يحقق ذلك هو الزوج k. إذا كان الزوج k أثقل فإننا نستنتج أن زوج الاختبار وجميع الأزواج التي سبق توزينها مصنوعة من الكوارتز. أما إذا كان الزوج k أخف فإننا نستنتج أن زوج الاختبار وجميع الأزواج التي تم وزنها سابقًا مصنوعة من الزجاج.

لنفرض إذن، أن الزوج k أثقل (الحالة أخف مماثلة). الآن، نقوم بفصل الزوج k ونضع كل منهما في كفة. إذا تساوى الوزنان فكلاهما زجاج وإذا اختلف الوزنان فإن أحدهما زجاج ونعلم من هي. أيًا كانت النتيجة نأخذ البلية الزجاج من الزوج k وإحدى بليتا الكوارتز من زوج الاختبار ونستخدم الزوج الجديد كزوج اختبار. الآن، نستمر كما في الحالة (١) لاختبار بقية الأزواج. من ذلك نجد أن عدد الوزنات التي نحتاجها لإنجاز المهمة هو:

$$1+(k-1)+1+\frac{(24-2k)}{2}=13$$ وزنة.

مما سبق رأينا إمكانية تحديد عدد البليات الزجاجية وعدد البليات المصنوعة من الكوارتز بوزنات عددها 13؛ وذلك بتقسيم البليات إلى أزواج. هل من الممكن إنجاز المهمة بعدد أصغر من ذلك لو قسمنا البليات إلى ثلاثيات أو رباعيات؟ المشكلة التي نواجهها في الرباعيات هي وجود حالات كثيرة (في الحقيقة يوجد خمس حالات). يمكن أن تكون جميعها زجاج أو ثلاث منها زجاج وواحدة كوارتز أو اثنتان زجاج واثنتان كوارتز أو واحدة زجاج وثلاث كوارتز أو جميعها كوارتز. لنفترض على سبيل المثال، أن الرباعي مكون من بليتين زجاج وبليتين كوارتز (هذا هو رباعي الاختبار) وبعد ذلك وضعنا رباعي آخر في الكفة الأخرى. ما الخيارات الممكنة؟ إذا تساوى الوزنان فإننا نستنتج أن الرباعي الثاني مكون من بليتين زجاج وبليتين كوارتز. إذا كان الرباعي الثاني أخف من رباعي الاختبار فإما أن تكون جميع بلياته كوارتز أو ثلاثة منها كوارتز وواحدة زجاج. والمسألة مماثلة إذا كان الرباعي الثاني أثقل من رباعي الاختبار. وبهذا نحتاج وزنتين إضافيتين في كل مرة لتحديد العدد من كل نوع. قم باختبار ذلك ستجد أن استخدام الرباعيات لن يكون أفضل. وبالمثل، فإن استخدام الثلاثيات لن يحسن الوضع. أما إذا حاولنا خماسيات أو سداسيات فإن الوضع يصبح معقدًا.

إن ذلك لا يعني عدم وجود إستراتيجية تنفذ المهمة بعدد أقل من 13 وزنة، لكننا لن نخوض في هذه المسألة هنا أكثر من ذلك. □

مسألة (٧,٢,٥) [باشيه - Bachet]

نستخدم في هذه المسألة ميزانًا ذا كفتين مع توافر مجموعة الأوزان النحاسية العيارية المختلفة. قبل اكتشاف الميزان الحديث كانت المحلات التجارية تستخدم أوزانًا عيارية نحاسية من الفئات التالية: وزنة واحدة وزنها أونصة، وزنتان وزن كل منهما 2 أونصة، وزنة واحدة وزنها 5 أونصات، وزنتان وزن كل منهما 10 أونصات، وزنة واحدة وزنها 20 أونصة، وزنة واحدة وزنها 50 أونصة. من الواضح أنه يمكن الحصول

على أي وزن (عدد صحيح) من 1 إلى 100 أونصة باستخدام هذه الوزنات العيارية. على سبيل المثال:

$$88 = 50 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1.$$

ما أصغر عدد من فئات الوزنات المختلفة التي نحتاجها لوزن جميع الأوزان الصحيحة من 1 إلى 40 أونصة؟

الحل:

هل من الضروري حل المسألة في النظام العشري؟ ماذا لو استخدمنا النظام الثنائي عوضًا عن ذلك؟ يقترح علينا النظام الثنائي استخدام فئات الوزنات: 1 أونصة، 2 أونصة، 4 أونصات، 8 أونصات، 16 أونصة، 32 أونصة. أي فقط ست فئات من الوزنات. لاحظ أنه يمكن كتابة أي عدد من 1 إلى 40 إلى عدد مقابل في النظام الثنائي. لذا يكون من الواضح أن ست فئات من الوزنات تفي بالغرض. على سبيل المثال، العدد الثنائي الذي يقابل العدد العشري 27 هو 11011. أي أننا نحتاج للحصول على الوزن 27 إلى 16 أونصة، 8 أونصات، 2 أونصة، 1 أونصة.

هل يمكن إنجاز المهمة بأقل من ست فئات من الوزنات؟ لنفرض أن لدينا خمس فئات من الوزنات. ما عدد الأوزان المختلفة التي يمكن الحصول عليها باستخدام خمس فئات من الوزنات؟ أي، كم عدد المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها 5؟ الإجابة (وجدناها في الفصل الأول) هي $32 = 2^5$. وبما أن المطلوب هو إيجاد الأوزان من 1 إلى 40 فإنه من الواضح أنه من غير الممكن إنجاز ذلك بخمس فئات من الوزنات. إذن، نحتاج على الأقل ست فئات وقد بينا كيفية إنجاز ذلك بست فئات. □

ماذا لو تحايلنا قليلاً وغيرنا في شروط المسألة؟ لنفرض أنه يسمح لنا وضع أوزان على كفتي الميزان. على سبيل المثال، الفئات 9,3,1 من الوزنات كافية لوزن أوزان من 1 إلى 13 ويمكن إنجاز ذلك على النحو التالي: لنفرض أن المطلوب هو إيجاد وزن

كيس S . الجدول 1 يبين كيفية إيجاد الأوزان من 1 إلى 13 . من السهل أن ترى أننا استخدمنا عمليات طرح في ست من أسطر الجدول للحصول على الوزن المطلوب.

كفة الميزان اليمنى	كفة الميزان اليسرى	الأوزان
S	1	1
$1+S$	3	2
S	3	3
S	$1+3$	4
$1+3+S$	9	5
$3+S$	9	6
$3+S$	$1+9$	7
$1+S$	9	8
S	9	9
S	$1+9$	10
$1+S$	$3+9$	11
S	$3+9$	12
S	$1+3+9$	13

جدول رقم (١)

مسألة تحدي (٨,٢,٥)

أثبت استحالة الحصول على الأوزان من 1 إلى 13 باستخدام فئتين من الأوزان فقط.

مسألة تحدي (٩,٢,٥)

استخدم فكرة السماح بوضع أوزان في كفتي الميزان لإيجاد أصغر عدد من فئات

الأوزان اللازمة للحصول على الأوزان الصحيحة من 1 إلى 40 أونصة. يجب أن تبين أن النظام الذي استخدمته سينجز المهمة وأن تثبت استحالة إنجاز المهمة بعدد أصغر.

مسألة تحدي (١٠,٢,٥)

صمم خوارزمية لإيجاد أصغر عدد من فئات الأوزان اللازمة للحصول على الأوزان الصحيحة من 1 إلى N أونصة حيث N عدد صحيح موجب. يجب أن تصمم خوارزمية لتنفيذ طريقة "كفة واحدة" وأخرى لتنفيذ طريقة "الكفتين".

مسألة (١١,٢,٥)

لدينا 13 حبة لؤلؤ وميزان ذو كفتين. ولنفرض أنه عند مقارنة وزن أي ست حبات بوزن أي ست حبات أخرى نجد أن الوزنين متساويين. أثبت أن وزن جميع الحبات متساوية الوزن.

الحل:

لنفرض أن النتيجة خاطئة. لنفرض أن حبات اللؤلؤ هي $P_1, P_2, \ldots, P_{13}$. رتب الحبات تناقصياً من حيث أوزانها بحيث تكون الحبة الأثقل على اليسار. الآن، إما أن الوزنين $\{P_1, P_2, \ldots, P_6\}$ و $\{P_7, P_8, \ldots, P_{12}\}$ مختلفان أو أن الوزنين $\{P_2, P_3, \ldots, P_7\}$ و $\{P_8, P_9, \ldots, P_{13}\}$ مختلفان (لأن أحد حبات اللؤلؤ سيكون وزنها أكبر من وزن جارتها التي على يمينها). وهذا تناقض. □

مسألة تحدي (١٢,٢,٥)

ما خصوصية العددين 6 و 13 في المسألة السابقة؟ هل نستطيع إيجاد مثال تكون فيه النتيجة خاطئة إذا استبدلنا هذين العددين بعددين آخرين؟

تمارين على الفصل الخامس

(١) لديك 27 وزنة نحاس من الأوزان $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 27^2$ جرام على التوالي. كيف يمكن تقسيمها إلى ثلاث مجموعات أوزانها متساوية؟

(٢) لديك 5 وزنات نحاسية جميعها متشابهة من حيث الشكل، لكن أوزانها مختلفة. استخدم ميزان ذا كفتين وأصغر عدد من الوزنات لترتيب أوزانها من الأخف إلى الأثقل.

(٣) نريد استخدام سيارة جيب لنقل 100 جالون من البنزين إلى مركز صحراوي يبعد مسافة 500 ميل. سعة خزان وقود الجيب 10 جالون ويستطيع أن يقطع في الخزان مسافة 200 ميل. يستطيع الجيب أن يحمل ثلاث صفائح بنزين إضافية سعة كل منها 10 جالونات. صمم إستراتيجية بحيث يقطع الجيب المسافة الكلية على مراحل يوصل البنزين إلى نقطة معينة ثم يعود لإعادة تعبئة خزان الوقود وحمل البنزين الإضافي وهكذا، لكنه في النهاية ينجح في توصيل 100 جالون من البنزين إلى المركز الصحراوي.

(٤) ما التعديل الذي يمكن إجراءه على إستراتيجية التمرين (٣) إذا كان هناك محطة بنزين على بعد 350 ميلاً بحيث يسمح للجيب باستخدامها لتعبئة خزان وقود، لكن لا يسمح له باستخدامها لتعبئة صفائح البنزين؟

(٥) ما التعديل الذي يمكن إجراءه على إستراتيجية التمرين (٣) إذا كانت سعة خزان وقود الجيب 20 جالونًا ويستطيع أن يقطع مسافة 20 ميلاً في الجالون، لكن لا يستطيع حمل أكثر من صفيحتين سعة كل منهما 10 جالونات؟

(٦) اشتركت في برنامج ألعاب على إحدى محطات التلفاز وعليك أن تختار واحدة من الجائزتين الماليتين في المغلفين اللذين يحملهما مقدم البرنامج. عندئذ، سألك مقدم البرنامج أن تختار أحد المغلفين (تعلم مسبقًا أن كل منهما

يحتوي على مبلغ من المال). بعد أن قمت باختيار المغلف أخبرك مقدم البرنامج أن المبلغ المالي الموجود في أحد المغلفين يساوي ثلاثة أمثال المبلغ المالي الموجود في المغلف الآخر، لكنه لم يخبرك أيهما. قمت بفتح المغلف الذي اخترته ووجدت أنه يحتوي على مبلغ 150 دولارًا. لذا فالمغلف الآخر إما أنه يحتوي على 50 دولارًا أو 450 دولارًا. الآن، سألك مقدم البرنامج عن رغبتك في استبدال المغلفين. هل من الحكمة أن تستبدل الجائزتين؟ لماذا؟ إذا استبدلنا "ثلاثة أمثال" بـ "مثلين" أو "مثل ونصف المثل" ماذا سيكون قرارك؟

(٧) لديك 10 حبات لؤلؤ متشابهة الشكل، لكنها تتكون من ثلاث فئات أوزان: 8 منها لها الوزن نفسه، واحدة أخف من الثمانية وواحدة أثقل من الثمانية. ما عدد الوزنات اللازمة باستخدام ميزان ذي كفتين لمعرفة الحبتين المختلفتين وتحديد أيهما الأخف وأيهما الأثقل؟

(٨) هذا التمرين مأخوذ من [BAL]. وضعنا 10 فيشات في صف واحد على طاولة. تتكون الخطوة من أخذ فيشة وتمريرها فوق الفيشتين التاليتين لها (سواء كانتا على يمينها أو يسارها) ومن ثم وضعها فوق الفيشة الواقعة مباشرة بعد هاتين الفيشتين. الهدف هو تجميع الفيش في خمس أكوام كل منها يحتوي على فيشتين والمسافات بين الأكوام متساوية. كيف يمكنك إنجاز ذلك؟

(٩) هل تستطيع إنشاء مربع سحري من النوع 3×3 باستخدام أول 9 أعداد فردية؟

(١٠) هل تستطيع إنشاء مربعًا سحريًّا من النوع 3×3 باستخدام أول تسعة أعداد زوجية؟

(١١) هل تستطيع إنشاء مربع سحري من النوع 3×3 باستخدام أي 9 أعداد صحيحة موجبة متتالية؟

(١٢) اشتريت ميزانًا جديدًا. هذا الميزان له 3 كفات بحيث يمكن استخدامها معًا. إذا وضعت ثلاثة أوزان في الكفات الثلاث يبين الميزان التالي: إذا كانت الوزنات الثلاث

متساوية فإن الميزان سيظهر ذلك، وإذا كانت وزنتان متساويتين والثالثة أخف أو أثقل فإن الميزان يظهر ذلك. أما إذا كانت الوزنات الثلاث مختلفة فسيظهر على الميزان الأثقل، الثقل الأوسط، الأخف. لديك الآن 9 حبات لؤلؤ إحداها مختلفة كما في المسألة (١,٢,٥). بيّن أن بالإمكان معرفة الحبة المختلفة بوزنتين فقط.

(١٣) استخدام ميزان التمرين رقم (١٢) لإيجاد عدد الوزنات اللازمة لمعرفة حبة اللؤلؤ المختلفة من بين 12 حبة (مع معرفة هل الحبة المختلفة أثقل أم أخف). ماذا عن 15 حبة لؤلؤ؟

(١٤) ما عدد الوزنات اللازمة في التمرينين (١٢) و (١٣) لو كنا نعرف مسبقاً أن الحبة المختلفة هي الأثقل؟ كم عدد الحبات التي يمكن تحديدها في وزنتين؟ في ثلاث وزنات؟

(١٥) المربع اللاتيني (latin square) من النوع $n \times n$ هو رقعة مربعة طول ضلعها n مقسمة إلى n^2 مربع وحدة بحيث نضع n من أنماط العناصر: مثلاً، حبات كرز، حبات مكسرات، حبات فاصولياء، قطع نقود وهكذا. الهدف هو أن نضع حبة واحدة فقط من كل نوع في كل صف وكل عمود.

أنشئ مربع لاتيني من النوع 2×2. كم عدد المربعات اللاتينية المختلفة من النوع 2×2؟ أنشئ مربع لاتيني من النوع 3×3. كم عدد المربعات اللاتينية المختلفة من النوع 3×3؟

من المعلوم أن عدد المربعات اللاتينية المختلفة من النوع 8×8 أكبر من 10^{21} وأصغر من 10^{22}، لكن إثبات ذلك صعب. هل تستطيع تقديم تقدير مناسب للحد الأعلى لعدد المربعات اللاتينية المختلفة من النوع 8×8؟

حاز موضوع المربعات اللاتينية على اهتمام باحثي الرياضيات في الوقت الحالي. على سبيل المثال، تبين استخدامها في إجراء تجارب غير متحيزة لخدمة أبحاث تتعلق بالزراعة.

(١٦) ما الحد التالي في المتتالية $9, 61, 52, 94, 46, 18, \ldots$ ؟

(١٧) لعبة الحياة (اكتشفها جون هورتون كونوي- John Horton Conway) تحتاج إلى رقعة مقسمة إلى مربعات كورقة رسم بياني كبيرة. تبدأ بوضع علامة X (أو تظليل) على بعض المربعات وهؤلاء هم "سكان" المجتمع الذي تنتمي إليه. شخصان (مربعان) يكونان متجاورين إذا اشتركا في ضلع أو ركن. أي أن لكل مربع 8 جيران، أربعة منهم على اليمين واليسار أو على الأعلى والأسفل وأربعة منهم على القطرين. قواعد اللعبة على النحو التالي: (i) إذا كان ثلاثة أشخاص جيرانًا للمربع الفارغ نفسه فإنهما سينتجان خلفًا (شخص رابع) لملىء هذا المربع (ii) إذا كان لشخص أربعة جيران أو أكثر فإنه سيموت من الازدحام (iii) إذا وجد شخص بدون جيران أو له جار واحد فقط فإنه سيموت من الوحدة. لنفرض أننا بدأنا بمجتمع بأي طريقة. عندئذ، يتم تطبيق القواعد الثلاث مباشرة لإنتاج التوزيع التالي للمجتمع. هل يوجد مجتمع نبدأ منه بحيث ينتج مجتمع دوري (أي يتكرر بعد عدد منته من الخطوات)؟ جرب ثلاثة مربعات في صف أفقي. هل يوجد مجتمع نبدأ منه ويبقى ثابتًا (أي لا يزيد أو ينقص أبدًا)؟ هل يوجد مجتمع نبدأ منه بحيث يموت مباشرة أو بسرعة ؟ هل يوجد مجتمع نبدأ منه يستمر في الإنتاج ويزداد بلا حدود؟

(١٨) يتم إلقاء حجر نرد ذي ستة وجوه مرقمة بالأعداد من 1 إلى 6. إذا لم يظهر العدد 6 في الرميات الثلاثين الأولى تأخذ مبلغ مليون دولار، وإذا ظهر العدد 6 في أول ثلاثين رمية فإنك تدفع مائة دولار. هل لصالحك أن تلعب هذه اللعبة؟

(١٩) *هذا التمرين مأخوذ من [BAL]. اصطحب رجلاً أثناء تجواله ثعلبًا وماعزًا وسلة ملفوف. لا يمكن ترك الثعلب منفردًا مع الماعز لأنه سيأكلها. وللسبب

* و ** المترجمان: المكان المناسب لهاتين المسألتين هو الفصل السابع.

نفسه لا يمكن ترك الماعز مع سلة الملفوف لأنه سيأكلها. ولكن يمكن ترك الثعلب مع سلة الملفوف لأنه لا يأكل الملفوف.

عند أحد مراحل السفر كان عليهم عبور نهر ووسيلة المواصلات المتاحة هي قارب صغير يتسع للرجل والثعلب فقط أو الرجل والماعز فقط أو الرجل وسلة الملفوف فقط. كيف يتمكن الرجل ومرافقيه من عبور النهر؟ ما أصغر عدد من الرحلات اللازمة لإنجاز ذلك؟

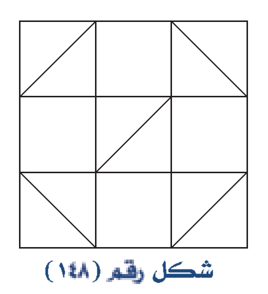
(٢٠) ❖ ❖هذا التمرين مأخوذ من [BAL]. يحتاج ثلاثة رجال وثلاثة أولاد عبور النهر. وسيلة المواصلات الوحيدة المتوافرة هي قارب صغير يتسع إما لرجل واحد فقط أو لولدين فقط. كل من الرجال والأولاد يستطيع التجديف. كيف يمكن إتمام الرحلة وما أصغر عدد من الرحلات اللازمة لذلك؟

(٢١) يتحرك الملك في لعبة الشطرنج من المربع الموجود عليه إلى أي مربع آخر مجاور له سواء إلى اليمين أو اليسار أو الأعلى أو الأسفل أو قطريًّا. يتم أكل قطعة الشطرنج بأن تحرك قطعتك فوق تلك القطعة (إلى المربع الذي يحويها). ما أكبر عدد من الملوك الممكن وضعها على مربعات رقعة الشطرنج بحيث لا يستطيع أي ملك أكل أي ملك آخر؟

(٢٢) تتحرك الملكة (الوزير) في لعبة الشطرنج من المربع الموجودة عليه خطيًّا بأي عدد من المربعات في أي من الاتجاهات: إلى أعلى أو أسفل، إلى اليمين وإلى اليسار، قطريًّا. ما أصغر عدد من الملكات الممكن وضعها على مربعات رقعة الشطرنج بحيث تستطيع الملكة أكل جميع المربعات؟ [المربع المشغول بملكة لا يمكن أكله بالملكة نفسها].

(٢٣) *لدينا الشكل الهندسي المبين في الشكل رقم (١٤٨).

* المترجمان: الموقع المناسب لهذه المسألة هو الفصل الأول.



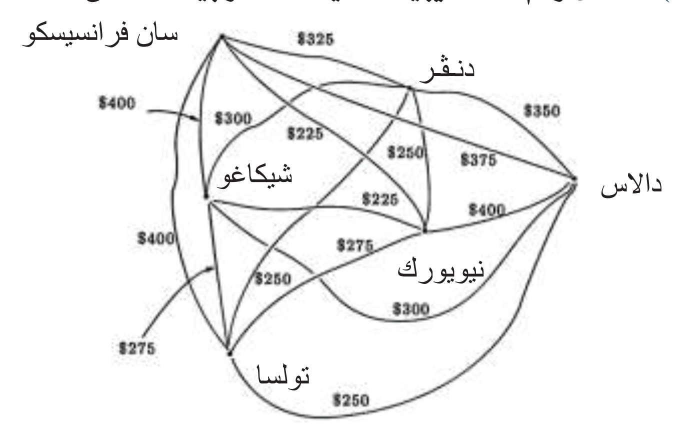
شكل رقم (١٤٨)

بيّن أنه يمكن أن تبدأ عند أي نقطة من نقاط القطع المستقيمة وترسم بقلم رصاص مسارًا متصلاً يبدأ عند تلك النقطة ويزور جميع القطع المستقيمة مرة واحدة فقط [إرشاد: نوعية درجات الرؤوس مهمة].

(٢٤) كتبنا الأعداد $1,2,3,...$ بالتتالي (كعدد واحد). ما الخانة 40000 ؟

(٢٥) يمتلك تاجر دورقًا يحتوي على 24 أونصة من السائل الثمين. لنقل السائل من وعاء إلى آخر يستخدم التاجر ثلاثة دوارق فقط سعتها: 5 أونصات، 11 أونصة، 13 أونصة. كيف يتمكن التاجر من تقسيم السائل إلى ثلاث أجزاء متساوية ؟

(٢٦) الشكل رقم (١٤٩) يبين تكاليف السفر بين عدد من المدن ؟



شكل رقم (١٤٩)

يبدأ المسافر من مدينة سان فرانسيسكو وينهي الرحلة في مدينة سان فرانسيسكو (المدينة التي يسكنها). ما المسار الأقل كلفة الذي يسلكه المسافر بحيث يزور كل

من المدن مرة واحدة على الأقل؟

هذه حالة خاصة من مسألة البائع المتجول المشهورة (وهي مسألة لم يتم التوصل إلى حل نهائي لها لحد الآن). سبق وأن تطرقنا لها في تمارين الفصل الرابع.

ما عدد المصفوفات من النوع $k \times m$ التي جميع عناصرها ± 1 بحيث يكون ضرب عناصر أي صف وأي عمود يساوي -1

الجبــــر والتحليــــل
Algebra and Analysis

(٦,١) القليل من الجبر
A Little Algebra

الجبر من الموضوعات الغنية بالمسائل والمهارات التي يمكن استخدامها للتدريب على تعلم أساليب حل المسائل. نقدم بعضًا منها في هذا البند.

مسألة (٦,١,١)

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن العدد $n^3 - n$ يقبل القسمة على العدد 3.

الحل:

يمكن تحليل العدد $n^3 - n$ إلى $(n-1)n(n+1)$. هذه ثلاثة أعداد صحيحة متتالية ومن ثم فحاصل ضربها يقبل القسمة على 3. وبهذا فالعدد $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3. $\square$

مسألة (٦,١,٢)

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن العدد $n^5 - n$ يقبل القسمة على 5.

الحل:

إذا حاولنا محاكاة المسألة السابقة وقمنا بتحليل العدد فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2+1) \end{aligned}$$

وبما أن القواسم ليست خمسة أعداد صحيحة متتالية فإن المسألة ليست بسهولة المسألة السابقة. وعوضًا عن ذلك، لاحظ أنه إذا كانت خانة آحاد العدد الصحيح n هي إحدى الخانات 0، 1، 4، 5، 6، 9 فإن أحد الأعداد $(n-1)$، n، $(n+1)$ يجب أن يقبل القسمة على العدد 5. ومن ثم يقبل حاصل الضرب القسمة على العدد 5. أما إذا كانت خانة آحاد العدد الصحيح n هي إحدى الخانات 2، 3، 7، 8 فإن خانة آحاد n^2 هي 4 أو 9. ومن ثم فإن n^2+1 يقبل القسمة على 5. وبهذا نخلص إلى أنه مهما كان العدد n فإن n^5-n سيقبل القسمة على العدد 5. □

مسألة تحدي (٦,١,٣)

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن العدد n^7-n يقبل القسمة على العدد 7.

مسألة (٦,١,٤)

أثبت المتطابقة التركيبية:

$$\binom{k}{m}+\binom{k}{m+1}=\binom{k+1}{m+1}$$

الحل:

بأخذ الطرف الأيسر:

$$\begin{aligned}\binom{k}{m}+\binom{k}{m+1}&=\frac{k!}{m!(k-m)!}+\frac{k!}{(m+1)!(k-m-1)!}\\&=\frac{(m+1)k!}{(m+1)!(k-m)!}+\frac{(k-m)k!}{(m+1)!(k-m)!}\\&=\frac{(k+1)k!}{(m+1)!(k-m)!}\\&=\frac{(k+1)!}{(m+1)!((k+1)-(m+1))!}\\&=\binom{k+1}{m+1}\end{aligned}$$

وبهذا نحصل على المطلوب. □

مسألة (٦,١,٥)

أثبت الصيغة التركيبية (مفكوك ذات الحدين):

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-2}a^2b^{k-2} + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + b^k$$

الحل:

من الواضح أن ضرب حدود المقدار $(a+b)^k$ للحصول على الفكوك يمكن إيجاده بسهولة إذا كان k صغيراً، لكن من الصعب إيجاد ذلك عندما يكون k كبيراً. إن ذلك يقترح استخدام الاستقراء.

عند $k=1$ نحصل على $a+b=a+b$ وهذه المساواة واضحة، لكنها غير مفيدة لرؤية الحل العام. ولذا دعنا نحاول $k=2$:

$$(a+b)^2 = a^2 + \binom{2}{1}ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$= a^2 + \binom{2}{1}a^{2-1}b + b^2$$

هذه العبارة مألوفة لدينا وهي أيضاً صائبة وتتطابق مع الصيغة المطلوب برهانها.

نفرض الآن أن الصيغة صائبة عند k. المطلوب الآن هو استخدام صواب العبارة عند k لإثبات صوابها عند $k+1$. لذا فإننا نفترض صواب:

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-2}a^2b^{k-2} + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + b^k$$

بضرب الطرفين بالمقدار $(a+b)$ نجد أن:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\left[a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{(k-2)}a^2b^{k-2} + \binom{k}{(k-1)}ab^{k-1} + b^k\right]$$

نقوم الآن بفكّ الطرف الأيمن. لاحظ أن كل من الحدود a^mb^n (عدا الحدين a^{k+1} و b^{k+1}) يتكرر مرتين في المفكوك. ومن ثم نحصل على :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \left[1+\binom{k}{1}\right]a^kb + \left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2 + \left[\binom{k}{2}+\binom{k}{3}\right]a^{k-2}b^3 + \cdots + \left[\binom{k}{k-2}+\binom{k}{k-1}\right]a^2b^{k-1} + \left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]ab^k + b^k$$

وباستخدام المسألة السابقة عن معاملات ذات الحدين نجد أن:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k+1}{3}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k+1}{(k-1)}a^2b^{k-1} + \binom{k+1}{k}ab^k + b^k$$

وبهذا فالعبارة صائبة عند $(k+1)$. وبهذا ينتهي الاستقراء ونكون قد برهنا صيغة مفكوك ذات الحدين. □

مسألة (٦,١,٦)

أي العددين أكبر : العدد $\alpha = (1+0.000001)^{1000000}$ أم العدد 2 ؟

الحل:

قبل قراءة حل المسألة، حاول إيجاد الحلّ باستخدام آلة حاسبة. ما المشكلة التي ستواجهها؟ والمشكلة نفسها ستظهر عند استخدامك لمعظم الحاسبات الآلية: دائمًا تحصل على إجابة مقربة لعدد معين من المنازل العشرية. لذا سنحاول إيجاد حلّ تحليلي لهذه المسألة.

وكإرشاد للحل، تذكر أن $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ يؤول إلى العدد e وهو $2.718\cdots$. العدد α هو في واقع الأمر هذه الصيغة عندما $k=1000000$. لذا ستتوقع إن α أكبر من 2. لإثبات ذلك، نستخدم مفكوك ذات الحدين للعدد α ونجد:

$$\begin{aligned}\alpha &= (1+0.000001)^{1000000}\\ &= 1^{1000000}+1000000\times 1^{999999}\times 0.000001+(\text{حدود أخرى موجبة})\\ &= 1+1\ +(\text{عدد موجب})\\ &> 2\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أن α هو فعلاً أكبر من 2. □

مسألة (٦.١.٧)

أي العددين أكبر: 1000^{1000} أم 1001^{999} ؟

الحل:

نستخدم مبرهنة ذات الحدين مرى أخرى:

$$
\begin{aligned}
1000^{999} &= [1000+1]^{999} \\
&= 1000^{999} + 999\times 1000^{998}\times 1 + \binom{999}{2}\times 1000^{997}\times 1^{2} \\
&\quad + \binom{999}{3}\times 1000^{996}\times 1^{3} + \cdots + \\
&\quad \binom{999}{997}\times 1000^{2}\times 1^{997} + \binom{999}{998}\times 1000\times 1^{998} + 1 \\
&< \underbrace{1000^{999} + 1000^{999} + \cdots + 1000^{999}}_{\text{1000 مرة}} \\
&= 1000^{1000}
\end{aligned}
$$

وبهذا يكون العدد 1000^{1000} هو الأكبر. □

الملاحظة المهمة في المسألة السابقة هي أننا لم نقم بإجراء الحسابات المطلوبة. لاحظ أيضاً عدم إمكانية حساب ذلك باستخدام لغة برمجة عادية مثل فورتران (FORTRAN) وذلك لأن العدد 1000^{1000} كبير جداً. من الممكن استخدام الترميز العلمي (الأسي) لأن $1000^{1000} = 1\times 10^{3000}$ ، لكن هذا لن يؤدي إلى نتيجة دقيقة لغرض المقارنة المطلوبة في المسألة. لكن من ناحية أخرى، يمكن استخدام برامج حاسب آلي جبرية مثل MATHEMATICA أو MAPLE أو AXIOM مع صعوبة حساب عدد كبير مثل 1001^{999} المكون من حوالي 3000 خانة. أما إذا كنت متمرساً في الحسابات فبإمكانك دائماً استخدام مرشح لمقارنة أي عدد بأي عدد آخر، لكن ذلك يحتاج إلى جهد كبير.

وعوضاً عن هذه التقنية الحديثة لحلِّ المسألة فإننا استخدمنا فكرة بدائية ولكنها في غاية الأهمية من التركيبات. وبهذا حصلنا على حلٍّ بسيط ومباشر سهل فَهمه والتحقق من صوابه.

مسألة (٦,١,٨)

إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا فاحسب قيمة:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)\times k}+\frac{1}{k\times (k+1)}$$

الحل:

إحدى الطرق لحلِّ هذه المسألة تكون بحساب المجموع لعدد من قيم k الصغيرة مثل $k=1,2,3,4$ ومن ثم البحث عن نمط. سنجرب ذلك أولاً.

لنفرض أن المجموع هو S_k . عندئذ، نجد أن:

$S_1=\frac{1}{2}$ ، $S_2=\frac{2}{3}$ ، $S_3=\frac{3}{4}$ ، $S_4=\frac{4}{5}$.

من الواضح وجود نمط لهذا المجموع مما يشير إلى استخدام الاستقراء لإثباته.

العبارة المطلوب إثباتها هنا هي:

$$S_k=\frac{k}{k+1}$$

لكل عدد صحيح موجب k . أثبتنا صواب S_1 . لنفرض الآن أن S_j صائبة. أي أن:

$$S_j=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(j-1)\times j}+\frac{1}{j\times (j+1)}=\frac{j}{j+1}$$

بإضافة:

$$\frac{1}{(j+1)(j+2)}$$

إلى الطرفين نحصل على:

$$S_{j+1}=\frac{j}{j+1}+\frac{1}{(j+1)(j+2)}=\frac{j+1}{j+2}$$

وهذا يثبت صواب S_{j+1} . وبهذا يكون البرهان بالاستقراء قد انتهى ووجدنا صيغة للمجموع S_k .

نقدم الآن طريقة أخرى سريعة لإيجاد هذا المجموع، ومع أنها تحتاج إلى بعض التحايل لإيجاد هذا المجموع، لكن هذا تحايل مهم ويجب أن نكون على دراية به:

نقدم طريقة لتحويل المجموع إلى مجموع متناوب "تلسكوبي" ومن ثم تتم عملية الاختصار. لهذا نكتب:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)\times k}+\frac{1}{k\times(k+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

(لاحظ أن جميع الحدود تختصر بعضها البعض ما عدا الحدين الأول والأخير). وهذا بالطبع يتفق مع صيغة S_k التي وجدناها سابقًا*. □

مسألة تحدي (٦.١.٩)

جد المجموع:

$$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\cdots+\frac{1}{(k-2)(k-1)k}$$

حل المسألة بالطريقتين اللتين استخدمناهما في حل المسألة السابقة.

مسألة (٦.١.١٠)

احسب المجموع:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)$$

---

* المترجمان: الحيلة التي استخدمناها في الحلِّ الثاني للمسالة هي ملاحظة أن $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ حيث يمكن التحقق من ذلك بجمع كسري الطرف الأيمن للحصول على الطرف الأيسر. كما يمكن التوصل إلى الطرف الأيمن من الطرف الأيسر بطريقة شائعة الاستخدام تدعى طريقة التفريق إلى كسور جزئية فعلية.

الحل:

نبدأ بمحاولة إيجاد نمط للمجموع. نفرض أن T_n هو المجموع المطلوب.
عندئذ، $T_1 = 2$ ، $T_2 = 8$ ، $T_3 = 20$ ، $T_4 = 40$ ، $T_5 = 70$.

من الواضح عدم وجود نمط نعتمد عليه. وعوضاً عن ذلك سنحاول أسلوب "الاختصارات" الذي استخدمناه في الحل الثاني من المسألة السابقة. كيف يمكن الاستفادة من وجود عامل مشترك بين كل حدين متتاليين؟ يمكن محاولة كتابة الحدود على النحو:

$$(*) \qquad T_n = 2(1+3)+3(2+4)+4(3+5)+\cdots n\left[(n-1)+(n+1)\right]$$

وبالطبع إن هذا خاطئ جبرياً. لاحظ أن كلاً من الحدود 3×2 ، 4×3 وهكذا، تكرر مرتين ما عدا الحدان الأول والأخير فهما لم يتكررا. لذا مع أن $(*)$ خاطئة، إلا أنها تقودنا إلى فكرة جيدة حيث نستطيع كتابة:

$$\begin{aligned}&2(1+3)+3(2+4)+4(3+5)+\cdots+n[(n-1)+(n+1)]\\&\quad=2[1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots n(n+1)]-1\times 2-n(n+1)\end{aligned}$$

لاحظ أننا طرحنا الحدين 1×2 و $n(n+1)$ من الطرف الأيمن لأنهما لم يتكررا مرتين في الأصل. إذن،

$$2\times 4+3\times 6+4\times 8+\cdots+n\times 2n = 2T_n - 2 - n(n+1)$$

أي أن:

$$(**) \qquad 2[2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2] = 2T_n - (n^2+n+2)$$

ولكن سبق وأن حسبنا مجموع مربعات الطرف الأيسر وهو:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

إذن:

$$2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n-6}{6}$$

بالتعويض عن ذلك في المعادلة (**) نجد أن:

$$\frac{2n^3+3n^2+n-6}{6}=2T_n-(n^2+n+2)$$

وبحل هذه المعادلة لإيجاد قيمة T_n نحصل على:

$$T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\qquad\square$$

مسألة تحدي (١١,١,٦)

جد المجموع:

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)$$

باستخدام أي طريقة بما في ذلك استخدام طريقة مشابهة للتي اتبعناها في حل المسألة السابقة.

(٢,٦) المتباينات
Inequalities

المتباينات هي إحدى الركائز المهمة في التحليل الرياضي وتستخدم خليطاً دقيقاً من التبريرات الكمية والنوعية. نقدم في هذا البند بعض التدريبات على التعامل مع المتباينات.

مسألة (١,٢,٦)

إذا كان a و b عددين حقيقين موجبين فأثبت أن:

$$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$$

الحل:

يمكن إعادة كتابة المتباينة على النحو :

$$2ab\leq a^2+b^2$$

وبهذا نتعرف على بعض حدود مبرهنة ذات الحدين. وبإعادة ترتيب المتباينة نحصل على :

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

الآن، الطرف الأيمن هو مربع كامل، لذا فالمتباينة هي:

$$0 \leq (a - b)^2$$

وهذا صائب دائماً لأن مربع أي عدد حقيقي يجب أن يكون غير سالب.

لاحظ استخدامنا التبرير الإرجاعي لتحويل المتباينة المطلوب إثباتها إلى عبارة صائبة دائماً. من الممكن التحقق من صواب التبرير على النحو التالي:

بما أن $(a - b)^2 \geq 0$ لكل عددين حقيقين a و b فإن:

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

وبإعادة الترتيب نجد أن:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

وبالقسمة على 2 نجد أن:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

وهذا بالضبط ما نود إثباته. □

سنستخدم التبرير الإرجاعي لحلِّ بعض المسائل اللاحقة، لكننا نترك التحقق المباشر من هذه الحلول (بطريقة مماثلة للمسألة السابقة) للقارئ.

المسألة (٢,٢,٦) حالة خاصة من الحقيقة التي فحواها: "الوسط الحسابي أكبر من أو يساوي الوسط الهندسي" حيث الوسط الحسابي (المتوسط) للأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_k$ هو :

$$M = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

والوسط الهندسي لهذه الأعداد هو:

$$G = \left[a_1 a_2 \cdots a_k\right]^{1/k}$$

كل من هذين الوسطين وسيلة ملائمة لإيجاد متوسط k من الأعداد الموجبة إحداهما مبنية على عملية الجمع والأخرى مبنية على عملية الضرب والعلاقة بين هذين الوسطين هي:

مسألة (٢،٢،٦)

إذا كانت $a_1, a_2, \cdots, a_k$ أعداداً حقيقية موجبة فأثبت أن:

$$G \leq M$$

الحل:

إحدى الطرق لحلِّ هذه المسألة هي الاستقراء الرياضي على عدد الأعداد k. في المسألة السابقة أثبتنا المتباينة في حالة $k = 2$. لنفرض الآن أن العبارة صائبة عندما $k = j$. أي نفرض صواب:

$$[a_1 a_2 \cdots a_j]^{1/j} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_j}{j} \qquad (*)$$

نقوم الآن بإعادة تسمية الأعداد على النحو التالي:

$$a_1 = b_1^j, a_2 = b_2^j, \ldots, a_j = b_j^j$$

عندئذ، نرى أن فرضية الاستقراء $(*)$ هي:

$$b_1 b_2 \cdots b_j \leq \frac{b_1^j + b_2^j + \cdots + b_j^j}{j}$$

أو:

$$j[b_1 b_2 \cdots b_j] \leq b_1^j + b_2^j + \cdots + b_j^j \qquad (\dagger)$$

وبهذا الترميز الجديد يكون المطلوب إثبات أن:

$$(j+1)[b_1 b_2 \cdots b_{j+1}] \leq b_1^{j+1} + b_2^{j+1} + \cdots + b_{j+1}^{j+1} \qquad (\ddagger)$$

لاحظ أن جميع الأعداد b_j ليست صفرية (لأنه لو كان أحدها يساوي صفرًا فإن $G = 0$ وبهذا تكون المتباينة صائبة).

بقسمة (‡) على b_{j+1}^{j+1} ووضع:

$$c_1 = \frac{b_1}{b_J + 1}, c_2 = \frac{b_2}{b_j + 1}, \cdots, c_j = \frac{b_j}{b_j + 1}$$

نجد أن:

$$(j+1)[c_1 c_2 \cdots c_j] \leq c_1^{j+1} + c_2^{j+1} + \cdots + c_j^{j+1} + 1$$

أو:

$$(j+1)\left[c_1 c_2 \cdots c_j\right] - 1 \leq c_1^{j+1} + c_2^{j+1} + \cdots + c_j^{j+1} \qquad (**)$$

والمطلوب الآن إثبات صواب (**) لجميع الأعداد الحقيقية الموجبة $c_1, c_2, \cdots, c_j$. بتطبيق فرضية الاستقراء (†) على الأعداد:

$$c_1^{(j+1)/j}, c_2^{(j+1)/j}, \cdots, c_j^{(j+1)/j}$$

نجد أن :

$$j[c_1^{(j+1)/j} \times c_2^{(j+1)/j} \times \cdots \times c_j^{(j+1)/j}] \leq c_1^{j+1} + c_2^{j+1} + \cdots + c_j^{j+1}$$

بالتعويض عن ذلك في المتباينة (**) نجد أنه كافٍ إثبات أن:

$$(j+1)[c_1 c_2 \cdots c_j] - 1 \leq j\left[c_1^{(j+1)/j} \times c_2^{(j+1)/j} \times \cdots \times c_j^{(j+1)/j}\right]$$

ومن الممكن تبسيط هذه المتباينة بوضع $m = \left[c_1 c_2 \cdots c_j\right]^{1/j}$ لنجد أن المطلوب إثباته هو $(j+1)m^j - 1 \leq jm^{j+1}$ لكل عدد حقيقي موجب m وكل عدد صحيح موجب j [لاحظ أن هذه المتباينة أبسط بكثير من المتباينة الأصلية حيث تحتوي على مجهول واحد m باستثناء مجهول الدليل j]. يمكن إثبات صوابها باستخدام الاستقراء على j، لكن ذلك سيؤدي إلى استقراء داخل استقراء وسنتجنب

ذلك بإجراء عمليات جبرية مباشرة:

$$(j+1)m^j - 1 - jm^{j+1} = -jm^j(m-1) + (m^j - 1)$$

ولكن:

$$m^j - 1 = (m-1)(m^{j-1} + m^{j-2} + \cdots + m^2 + m + 1)$$

(يمكن رؤية ذلك بالقسمة المطولة أو بضرب الطرف الأيمن). من ذلك نرى أن:

$$\begin{aligned}
&(j+1)m^j - 1 - jm^{j+1} \\
&= (m-1)[-jm^j + m^{j-1} + m^{j-2} \\
&\quad + \cdots + m^2 + m + 1] \\
&= -(m-1)\Big[(m^j - m^{j-1}) \\
&\quad + (m^j - m^{j-2}) + \cdots + (m^j - m) + (m^j - 1)\Big] \\
&= -(m-1)\Big[m^{j-1}(m-1) + m^{j-2}(m^2-1) \\
&\quad + \cdots + m(m^{j-1} - 1) + (m^j - 1)\Big] \\
&= -(m-1)\Big[m^{j-1}(m-1) + m^{j-2}(m-1)(m+1) \\
&\quad + \cdots + m(m-1)(m^{j-2} + m^{j-3} + \cdots + m + 1) \\
&\quad + (m-1)(m^{j-1} + m^{j-2} + \cdots + m + 1)\Big] \\
&= -(m-1)^2 \times (\text{مقدار موجب}) \\
&\le 0
\end{aligned}$$

وبهذا نحصل على المتباينة المطلوبة ونكون قد أنهينا البرهان. □

دعنا نلقي نظرة أخرى على حلِّ المسألة السابقة. الجزء الأهم من البرهان كان بإعادة تسمية المتغيرات بصورة منظمة، وهذا ليس فقط معالجة رموز، لكنه يلقي الضوء على تماثل تحتويه هذه المسألة. من الممكن أيضًا استخدام إعادة تنظيم الرموز هذا لحلِّ

المتباينة الأسهل المقدمة في المسألة (١,٢,٦). لاحظ أننا كنا نحاول إثبات صواب المتباينة:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

لنفرض أن $a \geq b$ وأن $b \neq 0$. بالقسمة على b^2 وبعد ذلك وضع $\frac{a}{b} = c$ نجد أن $c \geq 1$ وأن $2c \leq c^2 + 1$ لكل $c \geq 1$. وبهذا نكون قد حولنا متباينة في متغيرين إلى متباينة في متغير واحد فقط. سيفتح هذا النوع من التبسيط أبواباً جديدة لمعالجة المسألة. على سبيل المثال، بوضع $f(c) = 2c$ و $g(c) = c^2 + 1$ نجد أن $f(1) = g(1)$ و $f'(c) = 2 \leq 2c = g'(c)$ (استخدمنا هنا التفاضل). من ذلك نجد أن قيمتي f و g متساويتين عند $c = 1$ وأن g تزداد أسرع من f. بهذا نكون قد أثبتنا أن $f(c) \leq g(c)$ لكل $c \geq 1$.

إن الذي نتعلمه هنا هو عدم صواب متباينات تحتوي على قوى ما لم يكن هناك "وازن" بين قوى طرفي المتباينة. فمثلاً، لا يمكن أن تكون المتباينة:

$$a^3 + b^3 \leq 3ab + b^2$$

صائبة لكل عددين موجبين a و b. لرؤية ذلك، نجد بقسمة طرفي المتباينة على b^3 أن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 1 \leq \frac{3a}{b^2} + \frac{1}{b}$$

الآن، قم بتثبيت a واجعل $b \to \infty$ سنجد أن المتباينة تؤول إلى $1 \leq 0$ وهذا مستحيل. والمشكلة هنا هي ملاحظة أن قوى المتغيرات في طرفي المتباينة ليست "موزونة".

وعلى العكس من ذلك فإن قوى متغيرات المتباينة:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

موزونة حيث إن كل من حدودها هو من الدرجة الثانية. إن هذا هو الذي جعل التعويض $\frac{a}{b} = c$ يقود إلى حل جديد.

إن التغيير الذي أجريناه خلال حل المسألة (٢,٢,٦) ما هو إلا صيغة معدلة للتعويض $c = \frac{a}{b}$. هذا الأسلوب من الحلول يجب أن يكون جزءًا من خبرتنا ستخدمه عند الحاجة.

مسألة (٣,٢,٦)

أثبت أن $\frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log_2 \pi} > 2$.

الحل:

هذا النمط من المتباينات يختلف عن النمط الذي درسناه سابقًا لأنه يحتوي على صيغ متسامية (transcendental) كالدالة اللوغارتيمية.

بالطبع نستطيع استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسب الآلي لحساب طرفي المتباينة والتحقق من صوابها، لكن ذلك يعد تفاديًا للتحدي. هل يمكن حل هذه المسألة بقليل من التفكير. تذكر أنه لكل عددين موجبين a و b لدينا:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

باستخدام المتطابقة نجد أن المتباينة تأخذ الصورة :

$$2 < \frac{1}{\ln \pi \,/\, \ln 2} + \frac{1}{\ln \pi \,/\, \ln 5}$$

بضرب طرفي المتباينة بالعدد $\ln \pi$ والتبسيط نحصل على:

$$2 \ln \pi \leq \ln 2 + \ln 5$$

أو:

$$\ln \pi^2 \leq \ln 10$$

وبتطبيق الدالة الأسية على الطرفين وتذكر أن الدالة الأسية تزايدية نجد أن:

$$\pi^2 \leq 10$$

وهـذه متباينـة صـائبة لأن $3.15 < \pi$. وبهـذا نكـون قـد أثبتنـا صـواب المتباينـة الأصلية. $\square$

مسألة تحدي (٤،٢،٦)

أثبت صواب المتباينة $\frac{1}{\log_\pi 2} + \frac{1}{\log_2 \pi} > 2$.

مسألة (٥،٢،٦)

أثبـت أن $\sqrt{2} \geq |\cos x + \sin x|$ وأن المسـاواة تتحقـق عنـدما يكـون $\sin(2x) = 1$.

الحل:

هـذه متباينـة متسـامية أخـرى. في الغالـب يكـون مـن المناسـب كتابـة $|\alpha|$ على الصورة $\sqrt{\alpha^2}$. باستخدام ذلك نجد أن:

$$
\begin{aligned}
|\cos x + \sin x| &= \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} \\
&= \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x} \\
&= \sqrt{1 + 2\sin x \cos x} \\
&= \sqrt{1 + \sin(2x)}
\end{aligned}
$$

وبما أن أكبر قيمة للمقدار $\sin(2x)$ هي 1 فإن:

$$|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

مـن متتاليـة المسـاواة أعـلاه نـرى أن $\sqrt{2} = |\cos x + \sin x|$ فقـط عنـدما يكـون $1 + \sin(2x) = 2$. أي عندما يكون $\sin(2x) = 1$. وهذا ينهي حل المسألة. $\square$

مسألة تحدي (٦،٢،٦)

أثبـت أن $\sqrt{2} \geq |\cos x - \sin x|$ وأن المسـاواة تتحقـق عنـدما يكـون $\sin(2x) = -1$.

مسألة (٦,٢,٧)

أيهما أكبر $\sin(\cos x)$ أم $\cos(\sin x)$ ؟

الحل:

تذكر إمكانية أن تكون إحدى عبارتين أكبر من عبارة أخرى لقيم x معينة، لكن أصغر من عبارة أخرى لقيم مختلفة للمتغير x. الإستراتيجية التي نتبعها هنا هي استخدام المتطابقات المثلثية لتسهيل عملية مقارنة الصيغتين المتساميتين. نبدأ بالمتطابقة:

$$\cos\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\cos x)\cos\frac{\pi}{2}-\sin(\cos x)\sin\frac{\pi}{2}=-\sin(\cos x)$$

وبهذا نحصل على وسيلة مكافئة أخرى لكتابة إحدى الصيغتين ويكون لدينا:

$$(*)\qquad \cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\cos(\sin x)+\cos\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ولكن لدينا المتطابقة التالية من حساب المثلثات:

$$(**)\qquad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

[**إرشاد:** لإثبات هذه المتطابقة اكتب:

$$\cos x=\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) \text{ و } \cos y=\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$$

ثم استخدم متطابقة المجموع (الفرق) لدالة جيب التمام ومن ثم اجمع الناتج.]

نستخدم الآن $(**)$ في الطرف الأيمن من $(*)$ لنحصل على:

$$\begin{aligned}
&\cos(\sin x)-\sin(\cos x)\\
&=2\cos\left(\frac{\sin x+\cos x+\pi/2}{2}\right)\cos\left(\frac{\sin x-\cos x-\pi/2}{2}\right)\\
(\dagger)\qquad &=2\cos\left(\frac{\sin x+\cos x+\pi/2}{2}\right)\cos\left(\frac{\cos x-\sin x+\pi/2}{2}\right)
\end{aligned}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن دالة جيب التمام زوجية في المساواة الأخيرة. الآن، أثبتنا في المسألة(٦,٢,٥) أن $|\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}$. وبما أن $\pi\approx 3.141$ وأن $\sqrt{2}\approx 1.141$

فنرى أن:

$$0 < \left|\frac{\sin x + \cos x + \pi / 2}{2}\right| \leq \frac{1.415 + 1.58}{2} < 1.5 < \frac{\pi}{2}$$

وبالمثل، يمكن استخدام مسألة التحدي (٦,٢,٦) لإثبات أن:

$$0 < \left|\frac{\cos x - \sin x + \pi / 2}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$$

[لاحظ أن $|\sin x + \cos x|$ و $|\cos x - \sin x|$ أصغر من جعل كل من البسطين يساوي 0]. الآن $\cos w > 0$ عندما يكون $0 < |w| < \frac{\pi}{2}$. وبهذا نخلص إلى أن كلاً من حدي الطرف الأيمن من (†) موجب. إذن، $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0$ لكل x.

وبهذا يكون:

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$$

لكل قيم x الحقيقية. □

(٣,٦) حساب المثلثات وأفكار ذات علاقة بذلك
Trigonometry and Related Ideas

يرجع استخدام بعض أفكار حساب المثلثات إلى اليونانيين القدماء حيث استخدمها اليونانيون لأغراض إحصائية ولمحاولة فهم الأعداد الكسرية. في وقتنا الحالي يعد حساب المثلثات إحدى ركائز الرياضيات المهمة لاحتوائها على أفكار أساسية كالتناسب وتطابق الزوايا وتشابه المثلثات. كما أنها تعتبر مصدرًا غنيًّا للمسائل.

مسألة (١,٣,٦)

إذا كانت α زاوية حيث $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ عدد كسري فأثبت أن كلاً من $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ عدد كسري.

الحل:

لدينا:

$$1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

بما أن $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ **عدد كسري فكل من الطرف الأيسر والطرف الأيمن من المعادلة أعلاه عدد كسري. وبهذا فإن** $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ **عدد كسري. ولكن**

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\left[1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\\ &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\end{aligned}$$

وبما أن الطرف الأيمن عدد كسري فإننا نجد أن $\cos\alpha$ **عدد كسري. وهذا ينهي حل نصف المسألة. لاحظ الآن أن:**

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\left(2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

حصلنا على المساواة الأخيرة بقسمة كل من البسط والمقام على المقدار $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

وبما أن $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ عدد كسري فإننا نجد أن $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ عدد كسري. لكن سبق وأن أثبتنا أن $\cos\alpha$ عدد كسري. إذن، $\sin\alpha$ عدد كسري. وهذا ينهي حل النصف الآخر من المسألة. $\square$

مسألة تحدي(٢,٣,٦)

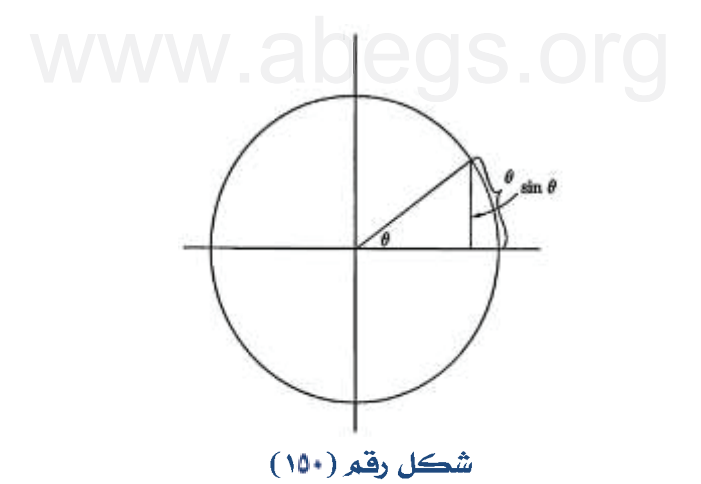
جد صيغة لعكس المسألة السابقة وبرهن صوابها.

مسألة (٣,٣,٦)

إذا كانت θ زاوية حادة موجبة مقاسة بالراديان فأثبت أن $\tan\theta > \theta$.

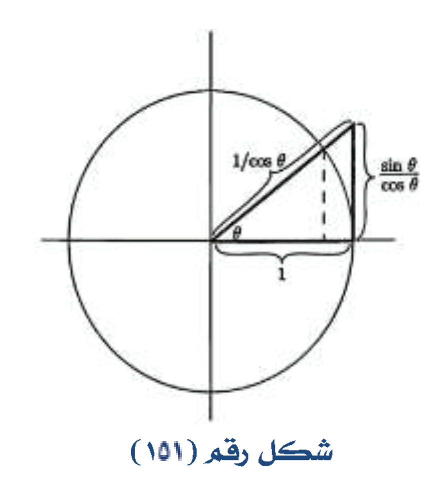
الحل:

الشكل رقم (١٥٠) شكل قياسي للزاوية θ.



شكل رقم (١٥٠)

واضح من الشكل رقم (١٥٠) أن $\theta < \sin\theta$. لكن ليس هذا التقدير المطلوب في المسألة. لذا نرسم الشكل رقم (١٥١) المشابه للشكل رقم (١٥٠)، لكن يبين لنا التفاصيل التي نحتاجها.



شكل رقم (١٥١)

لاحظ أن طول قاعدة المثلث (الذي أحد أضلاعه غامق) يساوي 1. وباستخدام تشابه المثلثين نجد أن طول الوتر يساوي $\frac{1}{\cos\theta}$ وأن الارتفاع يساوي $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

أيضًا، ارتفاع هذا المثلث أكبر من طول قوس الدائرة المقابل (لماذا ؟). ولكن طول القوس يساوي θ. إذن، $\theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ وهذا ما نود إثباته. □

مسألة تحدي (٤،٣،٦) [صعبة]

إذا كانت θ زاوية حادة مقاسة بالراديان فأثبت أن

$$\theta < \frac{\sin\theta + \tan\theta}{2}.$$

مسألة (٥،٣،٦)

إذا كانت α أي زاوية فأثبت أن :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right) = \frac{\sin\alpha}{8\sin(\alpha / 8)}$$

الحل:

غالبًا ما يكون من المستحيل معرفة حل مسائل حساب المثلثات من دون معرفة

متطابقات حساب المثلثات الأساسية. في هذه المسألة نستخدم المتطابقة $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$. لذا فالمتطابقة المطلوبة تكافئ:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\left[2\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right] = \frac{\sin\alpha}{4}$$

أي أن:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\sin\alpha}{4}$$

بالضرب في العدد 2 نحصل على:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[2\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right] = \frac{\sin\alpha}{2}$$

أي أن :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{2}$$

مرة أخرى نضرب طرفي المتطابقة بالعدد 2 نجد أن:

$$2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$$

وهذه متطابقة ضعف الزاوية التي بدأنا بها. وبما أن الخطوات صائبة إرجاعياً نكون قد أثبتنا صواب المتطابقة المطلوبة. □

مسألة تحدي (٦,٣,٦)

هل يمكن تعميم المسألة السابقة بحيث يكون عدد الحدود في الطرف الأيسر يساوي 4 ؟ هل توجد متطابقة رديفة بحيث يكون في الطرف الأيمن دالة جيب التمام؟

مسألة (٧,٣,٦)

كم عدد حلول المعادلة:

$$\tan x = \tan(x+10^\circ)\tan(x+20^\circ)\tan(x+30^\circ) \qquad (*)$$

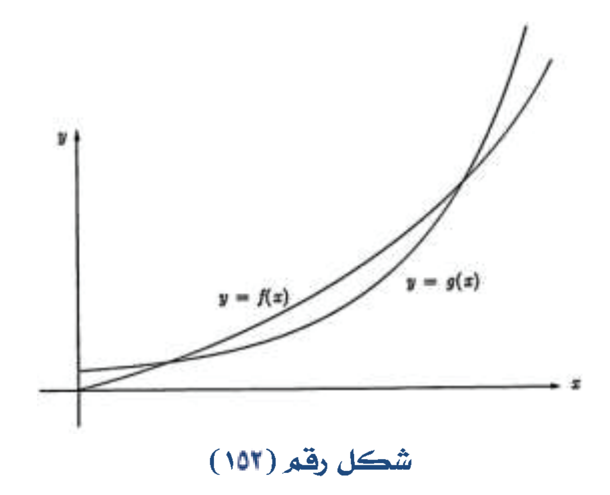
حيث $0 < x < 60^\circ$ ؛ [لاحظ أن قياس الزوايا هنا هو الدرجات].

الحل:

استخدم آلة حاسبة تحتوي على برنامج رسم دوال أو استخدم برامج الحاسب الآلي الجبرية لرسم دالتي الطرف الأيسر والطرف الأيمن على المحاور نفسها. ماذا تلاحظ؟

نقدم الآن حلاً تحليليًّا. نتبنى الفلسفة التي قدمناها في بادية هذا الكتاب وهي "جرب شيئًا ما" لاحظ أولاً أن دالة الظل تزايدية فعليًا في الفترة من 0° إلى 90°. إذن، الطرف الأيسر من $(*)$ دالة تزايدية فعليًا. أيضًا. كل من دوال الطرف الأيمن تزايدية في الفترة $0 < x < 60^\circ$. وبهذا فالطرف الأيمن دالة تزايدية فعليًا. لنفرض أن $f(x)$ هي دالة الطرف الأيسر من $(*)$ وأن $g(x)$ هي دالة الطرف الأيمن من $(*)$. الآن، $f(0) = 0$ و $g(0) > 0$. لذا يبدأ بيان f أسفل بيان g. ولكن يمكن استخدام آلة حاسبة أو جداول أو حاسب آلي لتجد أن $f(7^\circ) < g(7^\circ)$. من ذلك نقم بوضع $h(x) = f(x) - g(x)$ أن $h(0) < 0$ و $h(7^\circ) > 0$. وبما أن h دالة متصلة فإنه توجد قيمة بين هاتين القيمتين بحيث يكون $h = 0$. أي $f = g$. وبهذا نكون قد أثبتنا وجود حل واحد على الأقل للمعادلة $(*)$.

في الحقيقة نستطيع استنتاج أكثر من ذلك. بما أن بيان g يبدأ من 0 أعلى من بيان f، وأيضًا في الفترة $45^\circ < x < 60^\circ$ فإن كلاً من دوال الطرف الأيمن أكبر من 1 وأكبر من دالة اليسار. إذن، بيان g يجب أن يكون في النهاية أعلى من بيان f. لكن قبل أن يصل بيان g إلى ذلك فإنه يكون أسفل بيان f (على سبيل المثال عند $x = 7^\circ$). وهذا يحدث فقط إذا تقاطع البيانين عند نقطتين على الأقل (انظر: الشكل رقم ١٥٢).



شكل رقم (١٥٢)

وبهذا يجب أن يتقاطع بياني f و g عند نقطتين على الأقل [لاحظ أن الشكل رقم (١٥٢) ليس دقيقاً ولكنه يفي بالغرض].

في الحقيقة، البيانان يتقاطعان عند نقطتين بالضبط. لكن هذا يصعب إثباته من دون استخدام التفاضل والتكامل. الغرض من هذه المسألة هو توضيح كم المعلومات التي يمكن التوصل إليها من دون معرفة معلومات دقيقة.

مرة أخرى، اطلب مساعدة صديقك الحاسب الآلي وارسم الدالتين على المحاور نفسها وكبر جزء البيان في المجال $0 < x < 10^{\circ}$. كم عدد نقاط التقاطع التي نحصل عليها؟ □

تمارين على الفصل السادس

(١) إذا كان $0 \le a,b,c,d \le 1$ فأثبت أن:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ge 1-a-b-c-d$$

(٢) إذا كانت a,b,c,d أعداداً حقيقية موجبة فأثبت أن:

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \ge 16$$

(٣) إذا كان k عدداً صحيحاً موجباً أكبر من 1 فأثبت أن المجموع:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}$$

عدد غير صحيح.

(٤) أثبت أن $5555^{2222}+2222^{5555}$ يقبل القسمة على 7.

(٥) أثبت أن $11^{10}-1$ يقبل القسمة على 100.

(٦) ليكن N عدداً صحيحاً موجباً. أثبت وجود مضاعف للعدد N جميع خاناته مكونة من الخانتين 0 و 1. وإذا كان N لا يقبل القسمة على أي من العددين 2 و 5 فأثبت وجود مضاعف للعدد N جميع خاناته مكونة من الخانة 1.

(٧) ليكن N عدداً صحيحاً موجباً أكبر من 1000. أي العددين أكبر: 99^N+100^N أو 101^N ؟

(٨) لتكن $a_1,a_2,\ldots,a_k$ أعداداً حقيقية موجبة. أثبت أن:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right) \ge k^2$$

(٩) كم عدد الخانات 7 المستخدمة في جميع الأعداد من 1 إلى 10^8 ؟

(١٠) جد شرطاً على العدد الصحيح الموجب n بحيث يقبل العدد $1^n+2^n+3^n+4^n$ القسمة على 5. [إرشاد: إجابة ممكنة هي

"$n=1$" ولكن المطلوب هنا هو إيجاد شرط يتحقق لعدد غير منته من الأعداد n. والأفضل هو إيجاد شرط لازم وكافٍ].

(١١) إذا كان $\gamma_n = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \ln n$ فأثبت أن $|\gamma_n| \le 4$ [إرشاد: ارسم بيان الدالة].

(١٢) حل المعادلة التالية للعدد الحقيقي x:

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2| = x+2$$

(١٣) من المعلوم أن المتسلسلة التوافقية:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

تباعدية (انظر التفاضل والتكامل للتفاصيل). إذا حذفنا جميع الحدود التي تحتوي على العدد 7 في المقام فأثبت أن المتسلسلة الناتجة عن ذلك تقاربية هل يمكن تقدير المجموع؟

(١٤) إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_k$ أعداداً صحيحة موجبة تحقق $a_1+a_2+\cdots+a_k \le n$ فأثبت أن:

$$\frac{n!}{(a_1)!(a_2)!\cdots(a_k)!}$$

عدد صحيح.

(١٥) ليكن p عدداً أولياً أكبر من 3. ما باقي قسمة p^2 على العدد 12؟ لماذا تتساوى هذه البواقي لجميع قيم p؟

(١٦) جد جميع الحلول الصحيحة x, y, z للمعادلة $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$.

(١٧) ما خانة آحاد العدد 2^{43}؟

(١٨) فتح طفل عمره 10 سنوات حساب ادخار في أحد البنوك ووضع فيه 100 دولار. قرر الطفل أن يبقي هذا المبلغ حتى يبلغ الواحدة والعشرين. أيهما أفضل: أن

يضع الطفل المبلغ بفائدة مركبة يوميًا تساوي 5% أو فائدة مركبة أسبوعيًّا تساوي 5.1% ؟

(١٩) ليكن كل من a و r عددًا حقيقيًّا و k عددًا صحيحًا موجبًا. احسب المجموع $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k$.

[إرشاد: استخدم الاستقراء أو معالجة جبرية].

(٢٠) اشترت سيدة سيارة بمبلغ 20000 دولار. دفعت 3500 دولار دفعة مقدمة وقسطت باقي المبلغ على دفعات شهرية متساوية لمدة 36 شهرًا بنسبة ربح سنوية مقدارها 5% . ما المبلغ الشهري الذي ستدفعه السيدة شهريًّا؟ [لاحظ أن بائعي السيارات وأصحاب المكاتب العقارية لديهم جداول تم وضعها مسبقًا لحساب الدفعات الشهرية، وهذه الجداول تم حسابها رياضيًّا. والمطلوب هنا هو إيجاد هذه الحسابات. من الممكن أن تستعين بالمسألة 19 لإجراء هذه الحسابات].

(٢١) كرة حجمها يساوي مساحتها السطحية وكل منهما عدد مكون من خانتين مضروبًا في العدد π . ما قيمة حجم الكرة مقسومًا على مساحتها السطحية؟

(٢٢) إذا كانت x, y, z أعدادًا حقيقية تحقق $x + y + z = 1$ فأثبت أن:

$$xy + yz + xz < \frac{1}{2}$$

(٢٣) أيهما أكبر: العدد $10^{1/10}$ أم العدد $2^{1/3}$ ؟

(٢٤) حل المعادلة:

$$8 \quad 4^x + 4^{-x} \quad - 54 \quad 2^x + 2^{-x} \quad + 101 = 0$$

[إرشاد: ضع $y = 2^x$ و $z = y + \frac{1}{y}$].

(٢٥) إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$ فأثبت أن

$a = b = c = d$ [إرشاد: اكمل المربعات لتحصل على مجموع أربعة مربعات يساوي 0].

(٢٦) ينسب هذا التمرين إلى اسحاق نيوتن (Isaac Newton): عدد m من الأبقار ترعى تماماً n من الحقول في k من الأيام. عدد m' من الأبقار ترعى تماماً n' من الحقول في k' من الأيام. عدد m'' من الأبقار ترعى تماماً n'' من الحقول في k'' من الأيام.

ما العلاقة بين الأعداد $m, n, k, m', n', k', m'', n'', k''$ ؟

(٢٧) أثبت أن العدد الصحيح الموجب الذي جميع خاناته 1 لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً (ما عدا العدد الصحيح 1).

(٢٨) أثبت أن جميع الأعداد:

$$49, 4489, 444889, 44448889, \cdots$$

مربعات كاملة.

(٢٩) [هذا التمرين مأخوذ من أحد المسابقات الرياضية الحديثة] أنشئ مجموعة A من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق الخاصية: إذا كانت S أي مجموعة غير منتهية من الأعداد الأولية فإن A تحتوي عدداً هو حاصل ضرب عددين على الأقل من S وأن متممة A بالنسبة للأعداد الصحيحة الموجبة تحتوي على عدد هو حاصل ضرب عددين على الأقل من S [إرشاد: اقرأ المسألة جيداً، لا تفكر بعمق لأن هذه مسألة سهلة].

(٣٠) استخدم صيغة ذات الحدين لتقديم برهان آخر على أن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها k يساوي 2^k.

(٣١) إذا كان كل من α و β عدداً غير كسري فهل يمكن أن يكون α^β عدداً كسرياً؟

(٣٢) احسب $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$.

(٣٣) إذا كانت θ زاوية حادة حيث $\sin(2\theta) = a$ فاحسب قيمة $\sin\theta + \cos\theta$.

(٣٤) إذا كان $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ حيث $0 \le x < \pi$ فما قيمة $\tan x$ ؟

(٣٥) لنفرض أن x عدد موجب يحقق $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$. ما قيمة x ؟

(٣٦) ما القيم الموجبة عدا العدد 2 التي تؤدي إلى معادلة مماثلة للمعادلة في التمرين رقم (٣٥) بحيث يمكن حلّها لإيجاد قيمة x ؟ [أول من درس هذا التمرين هو جاوس (Gauss)].

(٣٧) يلتقي عقربا الساعات والدقائق عند الساعة الثانية عشر ظهرًا. ما الوقت الذي تشير إليه الساعة عند التقائهما لأول مرة بعد ذلك ؟ لثاني مرة ؟ كم مرة يلتقيان خلال 12 ساعة ؟

(٣٨) إذا كان p و q عددين صحيحين فرديين فأثبت عدم وجود جذور كسرية للمعادلة $x^2 + 2px + 2q$.

(٣٩) ليكن a و b عددين فرديين و n عددًا صحيحًا موجبًا. أثبت أن $a^3 - b^3$ يقبل القسمة على 2^n إذا وفقط إذا قبل $a - b$ القسمة على 2^n .

(٤٠) لنفرض أن α, β, γ أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية طول وتره γ . إذا كان $n > 2$ عددًا صحيحًا فأثبت أن $\gamma^n > \alpha^n + \beta^n$.

(٤١) إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن:

$$(n+2)^3 \neq n^3 + (n+1)^3$$

(٤٢) إذا كان j عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن المجموع:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2j+1}$$

لا يمكن أن يكون عددًا صحيحًا.

(٤٣) إذا كان $n > 1$ عددًا صحيحًا فأثبت أن $3^n + 1$ لا يقبل القسمة على 2^n .

(٤٤) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من خمس خانات مختارة من الخانات 1 أو 2 أو 3 ؟ كم عدد من بين هذه الأعداد يحقق الخاصية: يحوي العدد كلاً من 1 و 2 و 3 مرة واحدة على الأقل ؟

(٤٥) إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن العدد $5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ يقبل القسمة على 8.

(٤٦) إذا كان $n > 2$ عددًا صحيحًا فأثبت أن :

$$(1 \times 2 \times \cdots \times n)^2 > n^n$$

(٤٧) لنفرض أن a عدد صحيح حيث خانة عشرات العدد a^2 هي 7. ما خانة آحاد العدد a^2 ؟

(٤٨) جد ثلاثة أعداد طبيعية مختلفة بحيث يكون مجموع مقلوباتها عددًا صحيحًا.

(٤٩) أثبت استحالة كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ كحاصل ضرب كثيرتي حدود على الصورة $x^2 + ax + b$ و $x^2 + cx + d$ حيث a, b, c, d أعداد صحيحة.

(٥٠) لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداداً طبيعية مختلفة بحيث لا يقبل أي منها القسمة على عدد أولي أكبر من 3. أثبت أن :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 3.$$

(٥١) لتكن $\{a_j\}$ متتالية حسابية غير ثابتة. أي أن:

$$a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, a_4 = a + 3r, \ldots$$

حيث a و r ثابتان و $r \neq 0$. أثبت استحالة أن تكون جميع حدودها أعداداً أولية.

(٥٢) إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن $n(n+1)(n+2)(n+3)$ لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً.

(٥٣) جد مجموع الأعداد المختلفة المكونة من أربع خانات مأخوذة من الخانات $1, 2, 3, 4, 5$ وتحتوي كل من هذه الخانات مرة واحدة على الأكثر.

(٥٤) ليكن $a > 0$. ولتكن $a, 2a, 3a, \ldots, (n-1)a$ متتالية من الأعداد حيث n عدد صحيح موجب ثابت. أثبت أن الفرق بين أحد حدود المتتالية وعدد صحيح ما هو على الأكثر $\frac{1}{n}$.

(٥٥) ليكن x و y عددين صحيحين. أثبت أن العدد $2x+3y$ يقبل القسمة على 17 إذا وفقط إذا قبل العدد $9x+5y$ القسمة على 17.

(٥٦) جد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n بحيث يقبل العدد 2^n+1 القسمة على 3.

(٥٧) ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا عدد قواسمه الأولية المختلفة يساوي k (يمكن أن يظهر القاسم الأولي مرفوعًا لقوة في تحليل n. فمثلاً $12 = 2^2 \times 3$ له قاسمان أوليان مختلفان). أثبت أن $\log n \geq k \log 2$.

(٥٨) لنفرض أن $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 = 0$ حيث $a_j = \pm 1$ لكل j. أثبت أن n يقبل القسمة على 4.

(٥٩) إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أن $n^{n-1}-1$ يقبل القسمة على $(n-1)^2$.

(٦٠) جد رديفًا صائبًا للمسألة(٥,٣,٦) بحيث يكون الطرف الأيسر حاصل ضرب أربعة حدود.

(٦١) إذا كان $n > 2$ عددًا صحيحًا فأثبت أن 360 يقسم العدد $n^2(n^2-1)(n^2-4)$.

(٦٢) إذا كان m و n عددين صحيحين حيث $m > n$ فأثبت أن:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(٦٣) القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين الموجبين a و b يساوي 12 والمضاعف المشترك الأصغر لهما يساوي 432 . جد كلاً من a و b .

(٦٤) أثبت أن العدد $11111\cdots11$ عدداً مؤلفاً حيث عدد الخانات 1 يساوي 91 .

(٦٥) إذا كانت m, n, k أعداداً صحيحة موجبة حيث $m+n+k$ يقبل القسمة على 3 فأثبت أن $m^3+n^3+k^3$ يقبل القسمة على 3 .

(٦٦) إذا كان p عدداً أولياً فردياً فأثبت وجود عددين صحيحين بحيث يكون p فرق بين مربعيهما. هل العددان الصحيحان وحيدان ؟

(٦٧) جد جميع ثلاثيات الأعداد الصحيحة الموجبة m, n, p التي تحقق $m^2+n^2=p^2$ (تمسى هذه الثلاثيات، ثلاثيات فيثاغورس والسبب واضح لهذه التسمية). [إرشاد: اكتب $a=p+n$ و $b=p-n$. المعادلة تؤدي إلى المعادلة $m^2=ab$ حيث إما أن a و b زوجيان معاً أو فرديان معاً].

(٦٨) كل منا يعرف قانون حل المعادلة التربيعية، مثل، $x^2-3x-5=0$. الطريقة التالية تسمى طريقة الكسور المستمرة (continued fraction) يمكن استخدامها لحل معادلة الدرجة الثانية: اكتب:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3x+5}{x} \\ &= 3+\frac{5}{x} \\ &= 3+\cfrac{5}{3+\cfrac{5}{x}} \\ &= 3+\cfrac{5}{3+\cfrac{5}{3+\cfrac{5}{x}}} \end{aligned}$$

وهكذا. استخدم هذه الطريقة في كتابة خمس معادلات تكرارية ثم استبدل قيمة x الأخيرة بالعدد 3. بعد ذلك احسب قيمة x ثم قارن هذه القيمة بقيمة x التي تحصل عليها من قانون معادلة الدرجة الثانية. كم عدد المعادلات التكرارية اللازمة في طريقة الكسور المستمرة لكي نحصل على إجابة مقربة لمنزلة عشرية واحدة؟ لمنزلتين عشريتين؟

(٦٩) حلل كثيرة الحدود x^8+x^4+1 إلى حاصل ضرب كثيرات حدود من الدرجة الأولى والثانية بمعادلات حقيقية.

(٧٠) أثبت أن:

$$\cos^4\theta = \alpha\cos\theta+\beta\cos(2\theta)+\gamma\cos(3\theta)+\delta\cos(4\theta)+\tau$$

حيث $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\tau$ قيم ثابتة.

(٧١) [هذا التمرين مأخوذ من [HAL]] ما مجموع خانات العدد 4444^{4444}؟

(٧٢) لكل عدد صحيح موجب n أثبت أن:

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(٧٣) إذا كان طول كل من ساقي مثلث قائم مربعاً لعدد صحيح فأثبت أن طول الوتر لا يمكن أن يكون عددًا صحيحًا.

(٧٤) جد جميع أزواج الأعداد الصحيحة m و n التي تحقق $m + n = mn$.

(٧٥) أثبت أن 11 يقسم $n^{11} - n$ و 13 يقسم $n^{13} - n$ لكل عدد صحيح موجب n.

(٧٦) لنفرض أن $p_1, p_2, \ldots$ هي الأعداد الأولية مرتبة تصاعدياً. أي أن $p_1 = 2$، $p_2 = 3$، $p_3 = 5$ وهكذا. أثبت أن المجموع:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots$$

يزداد بدون حدود.

(٧٧) حلل $x^{10} + x^5 + 1$ بطريقتين:

(أ) كحاصل ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة.

(ب) كحاصل ضرب خمس كثيرات حدود بمعاملات حقيقية (يمكن أن تكون غير صحيحة). [إرشاد: ما درجات كثيرات الحدود ؟ هل يمكن أن تكون أحدهما من الدرجة الأولى ؟ هل توجد جذور حقيقية لكثيرة الحدود ؟ لماذا ؟].

(٧٨) جد كثيرة حدود من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية بحيث تقسم اثنتين من كثيرات الحدود التالية ولكنها لا تقسم كثيرة الحدود الثالثة:

$x^{3986} + x^{1993} + 1$، $x^{3988} + x^{1994} + 1$، $x^{3990} + x^{1995} + 1$.

الفصل السابع

متفـــــــرقات
A Miscellany

(١,٧) عبور النهـــــــر وتمارين مشابهة
Crossing the River and Similar Exercises

ارتـبط العديـد مـن المسـائل الـتي ظهـرت في العصـور الوسـطى بكيفيـة عبـور مجموعة من الناس ضفتي نهر بقارب صغير تحت شروط معينة. ونبدأ بإحدى المسائل البسيطة من هذا النوع:

مسألة (١,١,٧)

التقـى السـيد/ عصـام وزوجتـه السـيدة/ سـهى مـع السـيد /حسـام وزوجتـه السـيدة/ نهـى عنـد إحـدى ضـفتي نهـر وكـانوا مـدعوين إلى حفلـة زواج في الضـفة الأخـرى مـن النهـر. وسـيلة المواصلات الوحيـدة لعبـور النهـر هـي قـارب صـغير يتسـع لشخصين فقط. كيف يمكن أن يستخدم الأشخاص الأربعة القارب للعبور إلى الضفة الأخرى من النهر بشرط ألا تترك إحدى السيدتين مـع زوج السـيدة الثانيـة إلا بحضـور زوجها ؟ ما أقل عدد من الرحلات اللازمة لتنفيذ المهمة؟

الحل:

نرمز للسيد/ عصام بالرمز H_1 ولزوجته السيدة/ سهى بـالرمز W_1 وللسـيد/ حسـام بـالرمز H_2 ولزوجتـه السـيدة نهـى بـالرمز W_2. لنفـرض الآن أن H_1 و W_1 استخدما القارب في الرحلة الأولى. أحدهما سيرجع، لكن لا يمكن أن يكون W_1 لأنها ستتواجد مـع H_2 مـن دون وجـود زوجهـا H_1 وهـذا غـير مسـموح. إذن، H_1 هـو الـذي سيعود. لا يمكن أن يركب الآن H_2 و W_2 القارب ليعبرا النهر لأنه سيجتمع H_2 مع

W_1 في الضفة الأخرى من دون وجود الزوج H_1 وهذا غير مسموح. لذا يجب أن نرسل الزوجين H_1 و H_2 في الرحلة الثانية. وبهذا يترك H_1 مع زوجته W_1 في الضفة الأخرى من النهر ويعود H_2 إلى الضفة الأولى ويأخذ زوجته W_2 معه ويعبر النهر في الرحلة الثالثة إلى الضفة الأخرى. وبهذا احتجنا 5 رحلات لإنجاز المهمة. من الواضح أن عدد الرحلات اللازمة يجب أن يكون عددًا فرديًا. لذا، إذا كان بالإمكان إنجاز المهمة بعدد أقل من 5 رحلات فيجب أن يكون عدد الرحلات هو 3 . لكن في الرحلة الواحدة يترك فقط شخص واحد على الضفة الأخرى (ماعدا الرحلة الأخيرة). وبهذا يمكن عبور عدد $2+1$ من الأشخاص في ثلاث رحلات فقط. لذا فالعدد 3 غير ممكن ويكون أصغر عدد من الرحلات اللازمة هو 5. □

مسألة تحدي (٢,١,٧)

هل يمكن إنجاز مهمة المسألة السابقة بخمس رحلات إذا بدأنا الرحلة الأولى بشخصين غير H_1 و W_1 ؟ [وبالطبع غير H_2 و W_2 لأن ذلك يكون مشابه للحل الأول]. إذا حذفنا شرط الرحلات الخمس (أصغر عدد) فهل يمكن أن نبدأ الرحلة الأولى بشخصين غير H_1 و W_1 ؟

مسألة تحدي (٣,١,٧)

لنفرض الآن وجود ثلاثة أزواج وزوجاتهم بنفس شروط المسألة السابقة. هل يمكن إنجاز المهمة بعدد 11 من الرحلات ؟

مسألة تحدي (٤,١,٧)

ما التعديل الذي يمكن أن يحصل في حل المسألة (١,١,٧) إذا فرضنا وجود جزيرة في منتصف الطريق ؟

مسألة تحدي (٥,١,٧)

هل من الممكن إنجاز مهمة المسألة (١,١,٧) إذا كان المطلوب عبور أربعة أزواج

مع زوجاتهم ؟ إذا وجدت جزيرة في منتصف الطريق فإنه من المؤكد إنجاز المهمة. فسر ذلك.

مسألة (٦,١,٧)

أراد قائد عسكري أن يعبر بجنوده إلى الضفة الأخرى من النهر. وأثناء التفكير بكيفية إنجاز المهمة لمح قارباً صغيراً يستقله ولدان. أمر القائد الولدين أن يحضرا مع القارب. القارب يتسع لولدين فقط أو جندي واحد فقط. ومع ذلك توصل القائد إلى طريقة يستخدم فيها القارب لنقل جنوده إلى الضفة الأخرى من النهر. ما الطريقة التي اتبعها القائد لنقل جنوده ؟

الحل:

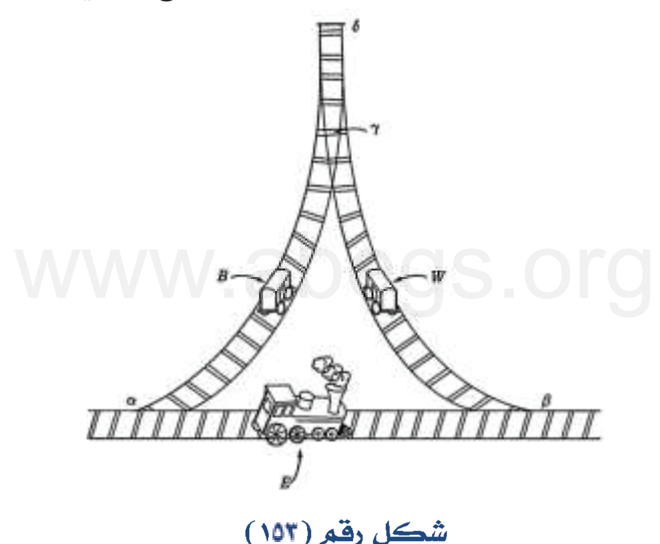
هذه مسألة منطق أكثر من كونها مسألة عد. لاحظ أن عدد الجنود غير معلوم، وهذا يعني أن حلّ المسألة لا يعتمد على عدد الجنود ومن ثم يمكن أن يكون الحلّ بسيطاً.

لا يمكن أن نرسل جندي في الرحلة الأولى لأننا لو قمنا بذلك فإما أن يبقى الجندي على الضفة الأخرى وحيداً وتتوقف الرحلات ويكون هو الجندي الوحيد الذي استطاع عبور النهر، وإما أن يعود الجندي بالقارب إلى الضفة الأولى وبهذا لم يتم إنجاز أي جزء من المهمة. لذا نرسل الولدين في الرحلة الأولى، يبقى أحدهما على الضفة الأخرى ويعود الثاني إلى الضفة الأولى. الآن، نقوم بإرسال جندي إلى الضفة الأخرى يبقى الجندي في الضفة الأخرى ويعود الولد إلى الضفة الأولى. الوضع الآن هو الوضع الذي بدأنا فيه، لكن استطعنا إبقاء جندي في الضفة الأخرى. لذا نكرر ما بدأنا به بإرسال الولدين إلى الضفة الأخرى وإبقاء ولد مع الجندي وعودة الولد الآخر مع القارب إلى الضفة الأولى. ثم نقوم الآن بإرسال جندي إلى الضفة الأخرى ليبقى مع الجندي الأول ويعود الولد بالقارب إلى الضفة الأولى. وهكذا، يمكن إعادة الخطوات عدد غير منته من المرات لنقل الجنود وقائدهم إلى الضفة الأخرى. □

مسألة (٧,١,٧) [هالموس- Halmos]

نترك الآن مسائل عبور النهر ونقدم مسألة تتعلق بقطر عربات قطار سكة حديد. يمكن لعربة محرك قطار سكة حديد أن تدفع أو تسحب عربة أو عربتين وأيضًا يمكن ربط عربتين مع بعضهما البعض.

يبين الشكل رقم (١٥٣) يبين أحد تقاطعات سكة حديد. لاحظ أن الجزء بين γ و δ هو نهاية السكة ومن ثم يتسع فقط إلى عربة واحدة (إما عربة نقل أو عربة المحرك). أما الجزء على يسار α أو على يمين β فإنه يتسع إلى أي عدد من العربات.



شكل رقم (١٥٣)

كيف تتمكن عربة المحرك من تبديل موقعي العربتين السوداء والبيضاء (أي نقل العربة السوداء إلى اليمين بين β و γ ونقل العربة البيضاء إلى اليسار بين α و γ) ومن ثم الرجوع إلى موقعها الأصلي بحيث تكون غرفة القيادة متجهة إلى اليمين؟ يمكن إنجاز ذلك بعشر خطوات. الخطوة هي إما تحريك عربة المحرك إلى نقطة وربط إحدى العربتين بها، وإما سحب عربة المحرك إحدى العربتين إلى نقطة ومن ثم فك رباطها.

الحل:

نرمز للعربة البيضاء بالرمز W والعربة السوداء بالرمز B ولعربة المحرك بالرمز E . الخطوات العشر لإنجاز المهمة هي كما يلي (ارسم شكلاً بعد كل خطوة لكي تستوعب كيفية تحريك العربات):

١. تتحرك E إلى الأمام للنقطة β ثم إلى الخلف على $\beta\delta$ وتربط العربة W .
٢. تدفع E العربة إلى الجزء $\gamma\delta$ وتفكّها وتتحرك إلى الأمام على $\beta\delta$.
٣. تتجاوز E النقطة β ثم تتحرك رجوعًا على $\alpha\beta$ ومن ثم إلى الأمام على $\alpha\gamma$ وتربط جهتها الأمامية مع العربة B .
٤. تدفع E العربة B وتربطها مع W وترجع وتتجاوز النقطة α .
٥. تدفع E العربتين حتى تصبح W في المنتصف بين α و β وتفكّ العربة W .
٦. ترجع E وتتجاوز النقطة α وتدفع B باتجاه $\alpha\gamma$ وتصل إلى $\gamma\delta$ وعندها تفك B .
٧. ترجع E على $\alpha\gamma$ تتجاوز النقطة α وتتحرك إلى الأمام على $\alpha\beta$ وتربط W .
٨. ترجع E على $\alpha\beta$ وتتجاوز النقطة α ثم تتحرك إلى الأمام على $\alpha\gamma$ وتدفع W إلى منتصف $\alpha\gamma$ وعندها تفك W .
٩. ترجع E على $\alpha\gamma$ وتتجاوز النقطة α ثم تتحرك أمامًا على $\alpha\beta$ وتتجاوز β وترجع على $\beta\gamma$ حتى تصل إلى B وتربطها.
١٠. تسحب E العربة B وترجع على $\alpha\beta$ حتى تصل منتصف $\alpha\beta$.

وهنا تنتهي رحلة عربة المحرك حيث ترجع إلى وضعها الأصلي متجهة إلى اليمين. □

مسألة تحدي (٧,١,٨)

إذا سمحنا لعربة المحرك بالرجوع إلى وضعها الأصلي بحيث يكون اتجاهها إلى اليسار (أي بعكس الاتجاه الذي بدأت منه) فبيّن كيفية إنجاز المهمة بست خطوات فقط.

(٧,٢) مسائل مستحيلة الإنشاء
Things That Are Impossible

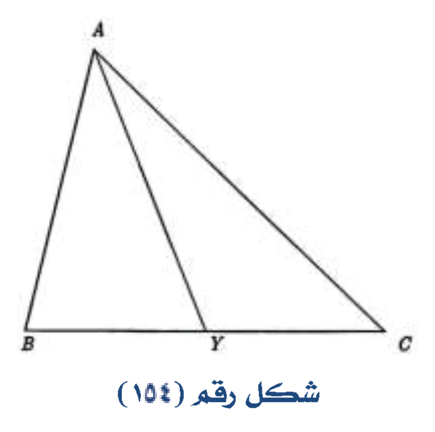
نبدأ بعينة من مسائل المغالطات الهندسية العديدة.

مسألة (٧,٢,١)

نقدم "برهانًا" على أن جميع المثلثات متساوية الساقين. طبعًا هذا الادعاء خاطئ. على سبيل المثال، يوجد مثلث أطوال أضلاعه 5، 6، 7 وهو بالتأكيد ليس متساوي الساقين. لذا "فالبرهان" الذي سنقدمه يحتوي على خطأ وهذا الخطأ دقيق. والمطلوب هنا هو اكتشاف هذا الخطأ.

برهان أن جميع المثلثات متساوية الساقين:

نبدأ بالشكل رقم (١٥٤) الذي يبين مثلث $\triangle ABC$ ونرسم المنصف AY للزاوية BAC.

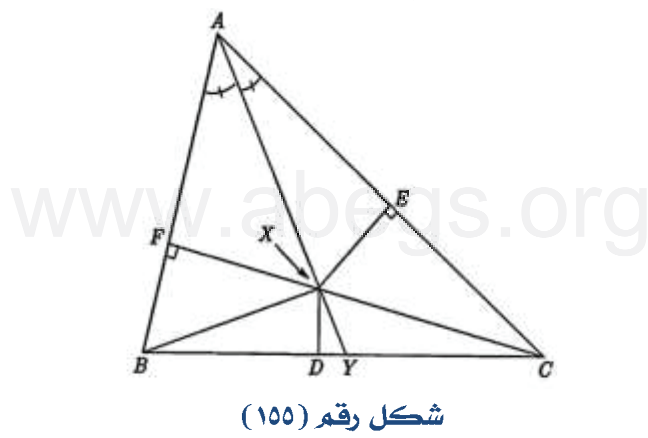


شكل رقم (١٥٤)

لدينا حالتان هما:

١. AY عمودي على BC. عندئذ، المثلثان ΔAYB و ΔAYC متطابقان. في الحقيقة، $BAY = CAY$ و $BYA = CYA$. لذا فإن المثلثين متشابهان. وبما أن AY ضلع مشترك فهما متطابقان. إذن، ΔABC متساوي الساقين.

٢. AY ليس عموديًّا على BC. عندئذ، AY يقطع المستقيم العمودي على BC الذي يمرُّ بنقطة منتصف BC ولتكن D. نفرض أن نقطة التقاطع هذه هي X. نرسم الآن XE عموديًّا على AC و XF عموديًّا على AB كما هو مبين في الشكل رقم (١٥٥).

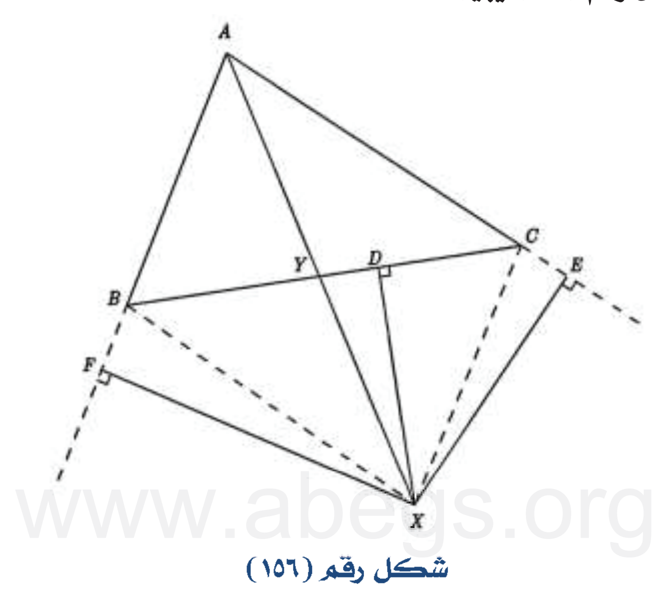


شكل رقم (١٥٥)

فرضنا أن X تقع داخل ΔABC ومن ثم فإن E نقطة على AC (وليست على امتداده) و F نقطة على AB (وليست على امتداده). الآن، ΔAXE و ΔAXF متطابقان لأن: AX ضلع مشترك، $XAF = XAE$، $XFA = XEA$. لذا فإن $AF = AE$. أيضًا، ΔBXF و ΔCXE متطابقان. لرؤية ذلك، لاحظ أن XD منصف عمودي للضلع BC. لذا فإن $BX = CX$. أيضًا، من التطابق السابق لدينا $XF = XE$، $BFX = CEX$ (كلاهما قائمة). وبهذا فإن المثلثين متطابقان ونجد أن $FB = EC$. إذن، $AB = AF + FB = AE + EC = AC$.

وبهذا يكون $\triangle ABC$ متساوي الساقين.

في الحالة (٢) يجب أن ندرس الحالة التي تكون فيها النقطة X خارج المثلث $\triangle ABC$. الشكل رقم (١٥٦) يبين ذلك.



شكل رقم (١٥٦)

يبين الشكل رقم (١٥٦) أيضًا أن XF العمودي على AB ويقطع امتداد AB عند F و XE العمودي على AC ويقطع امتداد AC عند E . كما في السابق، المثلثان $\triangle AXF$ و $\triangle AXE$ متطابقان ونجد من ذلك $AF = AE$. أيضًا $\triangle BXF$ و $\triangle CXE$ متطابقان وينتج عن ذلك $FB = EC$. إذن،

$$AB = AF - FB = AE - EC = AC$$

وبهذا نخلص إلى أن $\triangle ABC$ متساوي الساقين.

الحل:

تقترح الأشكال وجود خطأ في التبرير، لكن ما هذا الخطأ؟ تساعدنا الأشكال فقط في استيعاب المفهوم، لكن البرهان يكمن في العبارات والأفكار المستخدمة والتي تظهر على أنها مترابطة منطقيًا.

لا يوجد خطأ في الحالة التي يكون فيها منصف الزاوية A عمودياً على الضلع BC لأن هذا صحيح فقط عندما يكون المثلث متساوي الساقين. إذن، الخطأ هو في الحالة (٢).

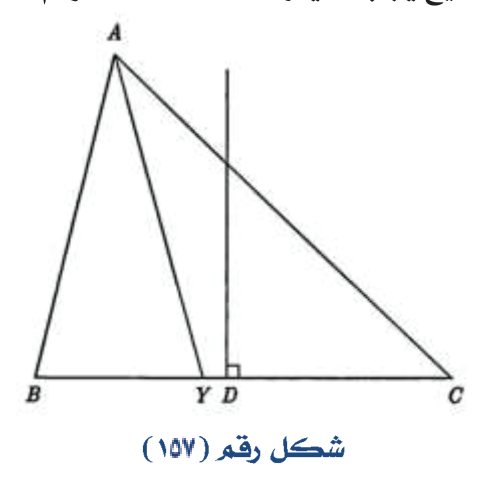
نأخذ أولاً الحالة التي تقع فيها النقطة X داخل المثلث. سنبرهن الآن استحالة ذلك. ولهذا الغرض نفرض أن $\theta = BAY = CAY$. باستخدام قانون جيب التمام لدينا :

$$(BY)^2 = (AB)^2 + (AY)^2 - 2(AB)(AY)\cos\theta$$
$$(CY)^2 = (AC)^2 + (AY)^2 - 2(AC)(AY)\cos\theta$$

الآن، إذا كان $AB > AC$ فيمكن الاستنتاج وبسهولة أن $BY > CY$ لأن:

$$\begin{aligned}(AB)^2 + (AY)^2 - 2(AB)(AY)\cos\theta \\ &= (AY)^2 + AB(AB - 2AY\cos\theta) \\ &> (AY)^2 + AC(AC - 2AY\cos\theta)\end{aligned}$$

وبهذا فإن الوضع الصحيح يجب أن يكون كما في الشكل رقم (١٥٧).



شكل رقم (١٥٧)

نترك للقارئ معالجة الحالة التي تقع فيها النقطة X خارج المثلث.

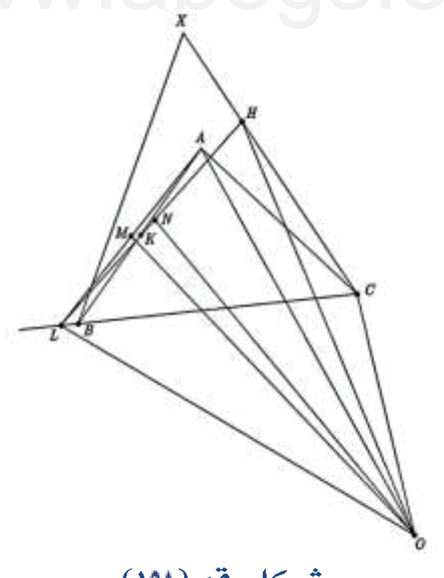
مسألة (٢,٢,٧) [تورتون- Turton]

جد الخطأ في "برهان" أن $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$.

قبل أن نقدم البرهان الخاطئ، دعنا نؤكد أن برهان صواب تقرير خاطئ هو أمر خطير جداً؛ لأنه إذا كان A تقريراً خاطئاً فإن التقرير الشرطي $A \Rightarrow B$ صائب مهما كانت قيمة صواب B (انظر: [KRA1] P(ولذلك، فإذا استطعنا تقديم "برهان" على صواب A فإننا نكون قد أثبتنا أن جميع التقارير صائبة. ولهذا فإن تقديم "برهان" على صواب $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$ لا يعتبر شيئاً مسلياً، لكنه يؤثر في نسيج التفكير التحليلي.

الحل:

نفرض أن ΔABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين حيث BC هو الوتر وأن ΔXBC متساوي الأضلاع ويشترك مع ΔABC بالضلع BC كما هو مبين في الشكل رقم (١٥٨).



شكل رقم (١٥٨)

اختر نقطة H على CX بحيث يكون $CH = CA$. ولنفرض أن K نقطة منتصف BA . ارسم المستقيم الذي يمرُّ بالنقطتين H و K ويقطع امتداد BC عند النقطة L . ارسم القطعة المستقيمة AL . لتكن M نقطة منتصف AL و N نقطة منتصف HL . افرض أن O هي نقطة تقاطع العمود على AL عند M والعمودي على HL عند N . لاحظ أن O تقع على الجهة الأخرى من AL المقابلة للنقطة X . نكمل الشكل برسم OC ، OA ، OH ، OL .

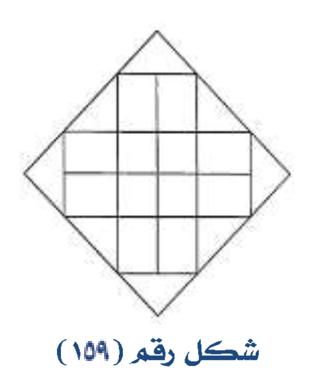
الآن، $\triangle OML$ و $\triangle OMA$ متطابقـان لأنهمـا يشـتركان في ضـلـع وأن $AM = LM$ ولهما زاويتان قائمتان. إذن، $OA = OL$. بالمثل، $\triangle ONL$ و $\triangle ONH$ متطابقان. إذن، $OA = OH$.

الآن، في المثلثين $\triangle OCA$ و $\triangle OCH$: $OA = OH$ ، $CA = CH$ (بالإنشاء)، يشـتركان في الضلـع OC . إذن، هـذان المثلثـان متطابقـان. ومـن ذلـك نجـد أن $BCA = BCH$. أي أن $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$. □

بما أن $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$ تقرير خاطئ فيجب أن يكون هناك خطأ في البرهان. أين هذا الخطأ؟ إذا كان التبرير المنطقي صائبًا (ومن الواضح أنه صائب) فإن الخطأ يكمن في الشكل الذي رسمناه للتوصل إلى النتيجة الخاطئة. من باب الفضول فإن المصدر [BALL] الذي اعتمد عليه مؤلف هذا الكتاب للتوصل إلى هذه النتيجة لم يرسم شكلاً. الجزء الأكثر غموضًا في هذه المسألة هو الادعاء بأن النقطة O تقع على الجهة الأخرى من AL المقابلة للنقطة X . نتحدى القارئ أن يجد الخطأ في هذا البرهان.

مسألة (٣,٢,٧)

بين استحالة رسم خطوط الشكل رقم (١٥٩) باستخدام قلم يبدأ عند نقطة ما ويرسم خطوطًا غير متقاطعة ومتصلة من دون أن يرفع يده عن القلم.



شكل رقم (١٥٩)

الحل:

هـل تعلمنـا شيئـًا عنـد دراسـة مسـألة جسـور سـانت بطـرس بـيرغ ومسـائل الاستحالة ذات الطبيعة المشابهة لها؟

رسم المستقيمات المبين في الشكل رقم (١٥٩) يحتوي على نمطين من الـرؤوس: الـنمط الأول رؤوس درجاتهـا (عـدد الأضـلاع الواقعـة عليهـا) زوجيـة ورؤوس درجاتهـا فرديـة. إذا كـان "تتبـع الأثـر" يعـني دخـول رأس والخـروج منـه (مـن دون السـماح بتقاطعات) فإنه يجب أن تكون درجة ذلك الرأس زوجية. أما إذا كانت درجة الرأس فردية فإما أن الأثر لن يبدأ عند ذلك الرأس ولكنه سيصل هذا الرأس ولن يخرج منه (أي أن الأثر ينتهي عند هذا الرأس) أو أن يبدأ الأثر عند ذلك الرأس وينتهي عنده.

لاحظ أن الشكل رقم (١٥٩) يتكون من 4 رؤوس درجاتها فردية. ولهذا فالأثر يجـب أن يبـدأ أو أن ينتهـي عنـد كـل مـن هـذه الـرؤوس ومـن الواضـح أن ذلـك مستحيل. □

مسألة تحدي (٤,٢,٧)

بـيّن أنـه يمكـن حـذف قطعـة مسـتقيمة واحـدة (يمكـن أن تتكـون القطعـة المستقيمة الواحدة من عدد من الأضلاع بمفهوم نظرية الرسومات) ومن ثم تحويل الشكل رقم (١٥٩) إلى شكل يسمح بإنجاز مهمة المسألة(٣,٢,٧).

تمارين على الفصل السابع

(١) هل يمكن استخدام كل من الخانات $0,1,2,\cdots,9$ مرة واحدة فقط للحصول على مجموعة أعداد صحيحة موجبة مجموعها يساوي 100 ؟

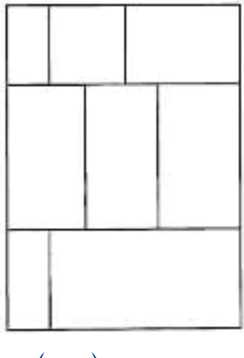
(٢) يريد السيد/ حسام وزوجتيه والسيد/ عصام وزوجتيه عبور النهر إلى الضفة الأخرى. وسيلة المواصلات الوحيدة المتاحة هي قارب يتسع لشخصين. لا يمكن اجتماع أي من الزوجتين مع الزوج الآخر إلا بوجود زوجهما. هل يمكن للأشخاص الستة من عبور النهر ؟ كم عدد الرحلات اللازمة ؟

(٣) أعد التمرين رقم (٢) إذا كان القارب يتسع لثلاثة أشخاص.

(٤) أعد التمرين رقم (٢) إذا كان عدد الرجال 3 ولكل منهم 3 زوجات والقارب يتسع لثلاثة أشخاص.

(٥) أعد التمرين رقم (٢) إذا كان عدد الرجال 3 ولكل منهم 3 زوجات ويوجد قاربان كل منهما يتسع لشخصين.

(٦) أثبت استحالة استخدام قلم رصاص لاتباع أثر خطوط الشكل رقم (١٦٠) ابتداءً من أي نقطة من دون أن ترفع يدك عن القلم.



شكل رقم (١٦٠)

(٧) أي من حروف اللغة الإنجليزية المبينة في الشكل رقم (١٦١) يمكن اتباع أثره بقلم رصاص ابتداءً من أي نقطة من دون أن ترفع يدك عن القلم ؟ لماذا ؟

ABCDEFGHIJKLMN
OPQRSTUVWXYZ

شكل رقم (١٦١)

(٨) إذا كان مجموع عددين حقيقيين موجبين يساوي 100 فبيّن استحالة أن يكون حاصل ضربهما يساوي 3000 .

(٩) أثبت استحالة التغطية التامة لمربع مغلق طول ضلعه 1 بعدد منته من الأقراص المغلقة (القرص المغلق هو دائرة ومجموعة نقاطها الداخلية) حتى لو سمحنا أن تتماس حدودها.

(١٠) أثبت استحالة التغطية التامة لقرص مغلق نصف قطره 1 بعدد منته من المربعات المغلقة حتى لو سمحنا أن تتماس حدودها.

(١١) افرض أن T مثلث متساوي الأضلاع مصنوع من ورق مقوى. بيّن استحالة استخدام مقص لقطع T إلى قطعتين إذا أعدنا لصقهما ينتج عن ذلك مربع.

(١٢) سيدتان تمارسان رياضة المشي على طريق مستقيمة تبدأ كل منهما من إحدى نهايتي الطريق. في اللحظة نفسها بدأتا المشي باتجاه بعضهما البعض. كل منهما تسير بسرعة ثابتة، لكن إحداهما أسرع من الثانية. تقابلتا على بعد 720 مترًا من نهاية الطريق اليمنى. عند وصول كل منهما إلى نهاية الطريق، استراحت لمدة عشر دقائق، وبعد ذلك بدأتا في المشي ليعودا إلى نقطة بداية كل منهما بالسرعة الأولى لكل منهما. تقابلتا هذه المرة على بعد 400 متر من نهاية الطريق اليسرى. ما طول الطريق ؟

(١٣) تنسب المتتالية التالية إلى الرياضي المشهور من جامعة برنتسون جون كونوي (John Conwag). هل من الممكن معرفة الحد التالي من حدود المتتالية:

$$1,1,1,3,1,4,1,1,3,6,1,2,3,1,4,8,1,3,2,4,1,6,\ldots$$

(١٤) يستطيع مستكشف حمل كمية من المؤن تكفيه لثلاث أيام فقط. بدأ رحلته الصحراوية التي تهدف إلى التوغل في الصحراء والوصول إلى أبعد نقطة ممكنة. بناء على العقد الذي أبرمه مع الشركة الذي تمونه يسمح له بتخزين كمية من المؤن تكفيه لعشرة أيام على الأكثر. يسمح له بالتوغل في الصحراء إلى مسافة معينة ويخزن بعض التموين في إحدى الواحات ويرجع لحمل كمية إضافية من التموين. يستطيع أن يسير 8 أميال في اليوم. ما أبعد مسافة يستطيع سيرها؟

(١٥) احسب مساحة ولاية نيفادا [إرشاد: لإنجاز ذلك تحتاج إلى خارطة جيدة للولاية ومنقلة لقياس الزوايا].

(١٦) *لدينا 12 من العصي الخشبية طول كل منها قدم واحد. ما عدد طرق تجميعها لإنشاء هيكل مكعب.

(١٧) جلس طفلان على طاولة لإنشاء مكعبين. طول ضلع المكعب الأول 4 بوصات وطول ضلع المكعب الثاني 2 بوصة. حجم المكعب الكبير هو $4^3 = 64$ بوصة مكعبة وحجم المكعب الصغير هو $2^3 = 8$ بوصة مكعبة. متوسط طول ضلعي المكعبين هو $3 = \frac{2+4}{2}$ ومتوسط حجميهما هو $36 = \frac{8+64}{2}$. لكن حجم المكعب الذي طول ضلعه متوسط طول ضلعي المكعبين لا يساوي متوسط حجم المكعبين. لماذا؟

* المترجمان: هذه مسألة تركيبات والمكان المناسب لها هو الفصل الثالث.

(١٨) هـذا التمـرين هـو أحـد أشـكال معضـلة السـجين المشـهورة الـتي تعتـبر أسـاساً للعديد من التحليلات النفسية والاجتماعية والاقتصادية.

أنت و 49 آخـرين متواجـدين في زنزانـة واحـدة جميعكم معصوبـي الأعـين ولا يسـمح لكم بالتحـاور مـع بعضكم. وقـف آمـر السـجن أمـام الزنزانـة وأعلـن أن أمـامكم خمـس دقـائق فقـط للاختيـار. إذا لم يرفـع أي مـنكم يـده بعـد مـرور الدقائق الخمس فسيدفع كل منكم 10 دولارات ويطلق سراحكم. أما إذا رفع أحدكم يده اليمنى فسيدفع كل واحد رافع يده مبلغ 20 دولاراً ويدفع كل واحد لم يرفع يده مبلغ 100 دولار.

من الواضح أن الخيار الأمثل هو عدم رفع أي مـن المسـاجين يـده. ولكـن إذا رفـع أحد المسـاجين يـده فيكون مـن الأفضـل لـك رفـع يـدك (لأنـك في هـذه الحالـة ستدفع 20 دولارًا عوضًا عن 100 دولار). ماذا سيكون قرارك؟ هل هـذه إجابـة واضحة؟ هل توجد إستراتيجية مثلى؟

(١٩) اشتركـت في أحد برامج المسابقات. عـرض عليـك مقـدم البرنـامج أن يـدفع لـك 600 دولار الآن أو أن تقوم بتدوير الدولاب. إذا اخترت تدوير الـدولاب فـإن فرصـة ربحـك لمبلـغ 800 دولار هـي 80% وفرصـة خسـارتك لكـل شـيء هـي 20%. مـا الخيار الأنسب لـك؟ كيـف يمكن تعديل المبلغ 800 دولار؛ لكـي يغريـك لتغيير خيارك؟ ماذا لو كانت فرصة ربحك على الدولاب هي 75%؟

(٢٠) لنفـرض أنـك تريـد معرفـة عـدد النحـل في إحـدى خلايـا النحـل. قمـت بأخـذ 100 نحلـة من الخلية وعلمتهم بوضـع صبغة عليهم. بعـد ذلـك أعدتهم إلى الخلية بطريقة تسمح لهم بالاختلاط مع بقية نحل الخليـة. بعـد فترة زمنيـة أخـذت 100 نحلـة عشـوائيـًا مـن الخليـة ولاحظـت أن مـن بينهـا سـت نحـلات معلَّمـة بالصـبغة. مـا الـذي يمكـن استـنتـاجه عـن عـدد النحـل في الخليـة ؟ هـل هذه طريقة ملائمة لمعرفة عدد النحل في الخلية؟

(٢١) هذا التمرين هو أحد التمارين الذي اشتهر بطرحها الرياضي الهنغاري بول إيردوش (انظر: [MPI]). لنفرض أن N عدد صحيح موجب ثابت. ما أصغر عدد من الأشخاص الذي يتوجب وجودهم في غرفة بحيث نضمن وجود على الأقل N منهم يعرفون بعضهم البعض أو N منهم لا يعرفون بعضهم البعض؟ على سبيل المثال، فإذا كان عدد الأشخاص المتواجدين في الغرفة هو 2 فإما أن هذين الشخصين يعرفان بعضهما أو لا يعرفان بعضهما. وهذا حل المسألة عندما يكون $N = 2$. إذا كان $N = 3$ فأثبت أن الإجابة هي 6 . هذه المسألة تزداد تعقيداً بشكل سريع. فمثلاً، الحل غير معلوم عندما يكون $N = 6$.

(٢٢) أكمل خطوات البرهان التالي لإثبات عدم وجود عدد كسري مربعه يساوي 2 :

(أ) نفرض وجود عدد كسري $\mu = \frac{a}{b}$ حيث $\mu^2 = 2$ (نستطيع افتراض أن a و b عددان صحيحان موجبان القاسم المشترك الأكبر بينهما يساوي 1 . أي أن الكسر بأبسط صورة ممكنة).

(ب) من الفرض لدينا $2 = \mu^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. ومن ثم نجد أن:

$$a^2 = 2b^2 \qquad (*)$$

(ج) بما أن 2 يقسم $2b^2$ فإن 2 يقسم a^2 . وبهذا فإن 2 يقسم a . إذن، $a = 2\alpha$ حيث α عدد صحيح موجب.

(د) بالتعويض عن a في $(*)$ نجد أن $2\alpha^2 = b^2$.

(هـ) بما أن 2 يقسم $2\alpha^2$ فإن 2 يقسم b^2 ومن ثم 2 يقسم b .

(و) أثبت أن 2 يقسم كلاً من a و b . إن ذلك يعني وجود قاسم مشترك

بين a و b. ولكننا افترضنا عدم وجود قواسم مشتركة بينهما. هذا التناقض يعني أن العدد الكسري $\mu = \frac{a}{b}$ غير موجود.

(٢٣) أثبت عدم وجود عدد كسري مربعه يساوي 8. [إرشاد: إما أن تستخدم نتيجة التمرين رقم (٢٢) أو أن تتبع طريقة مماثلة لطريقة حل التمرين رقم (٢٢)].

(٢٤) ليكن K عددًا صحيحًا موجبًا. إذا كان $\alpha = \sqrt{K}$ عددًا كسريًّا فأثبت أن α عددًا صحيحًا.

(٢٥) أثبت وجود عدد غير كسري بين أي عددين كسريين.

(٢٦) أثبت وجود عدد كسري بين أي عددين كسريين.

(٢٧) هذا التمرين يتطلب استخدام عدد من الأفكار التي سبق وأن تعلمناها في أجزاء مختلفة من هذا الكتاب وهو تمرين يحتاج إلى بعض التحايل. اطرحه على بعض أصدقائك.

لدينا أربع نقاط A, B, C, D مختارة عشوائيًا من مربع وحدة. رسمنا بينها قطع مستقيمة بالترتيب AB ، BC ، CD ، DA. ما احتمال أن يكون الشكل الناتج محدبًا؟ [قدم هذه المسألة جايد فنسن- Jade Vinson].

(٢٨) مستكشف جريء، سار ميلاً باتجاه الجنوب ثم ميلاً باتجاه الشرق ثم ميلاً باتجاه الشمال وانتهى في المكان نفسه الذي بدأ منه. ما السبب في ذلك؟ هذا ممكن إذا بدأ المستكشف عند القطب الشمالي. جد عدد غير منته من الطرق لتحقيق ذلك.

(٢٩) [أخذت هذه المسألة من محاضرات كتبها مايك فيلوز ونيل كوبلتز" -Mike Fellows and Neal Koblitz]

النص التالي هو نص معمى (encryption) لنص مأخوذ من اللغة الإنجليزية

ESPNTASPCSLDMPPYMCZVPY

تمت عملية التعمية بإزاحة كل من حروف الرسالة الواضحة (الأصلية) بعدد

ثابت من الحروف سواء إلى اليمين أو إلى اليسار. فمثلا، إذا أزحنا كل من حروف الرسالة "HELLO THERE" 5 حروف إلى اليمين فإن الرسالة المعماة الناتجة عن ذلك هي "MJQQ YMJWJ".

لاحظ أن "M" يقع بعد خمس حروف (إلى اليمين) من الحرف "H" (أي أن أول حروف النص المعمى يأتي بعد خمسة حروف من أول حروف النص الواضح) وأن "J" يقع بعد خمسة حروف من"E" وهكذا. أما إذا أجرينا عملية التعمية بإزاحة كل من حروف الرسالة الواضحة "BOO HOO" ثلاثة حروف إلى اليسار (أي 3−) فإننا نحصل على الرسالة المعماة "YLL ELL".

لاحظ أننا نفترض أن الهجائية تتحرك دائرياً. فبعد الوصول إلى "X, Y, Z" نعود مباشرة إلى الحرف "A". أي أنه بإزاحة B ثلاثة حروف إلى اليسار نحصل على Y (A,X,Y).

حصلنا على الرسالة المعماة المقدمة في بداية هذا التمرين بطريقة الإزاحة (إما الموجبة أو السالبة). جد الرسالة الواضحة. [إرشاد: حذفنا الفراغات بين كلمات الرسالة. الحرف الأكثر ترددًا (شيوعًا) باللغة الإنجليزية هو الحرف "E". ما الحرف الذي يأتي بعد ذلك؟ وبعد ذلك؟ استخدم هذه المعلومة لتخمين الحروف المقابلة للحروف الأكثر ترددًا في النص المعمى].

(٣٠) نظام التعمية لفيجينير (Vigenere cipher) هو طريقة تعمية مكونة من إزاحات، لكن هذه الإزاحات تستخدم كلمة سرية تسمى مفتاح التعمية تتم عملية تعمية الرسائل على النحو التالي: لنفرض أن مفتاح التعمية هو الكلمة "FLAT". الخطوة الأولى تتم بتحويل حروف مفتاح التعمية إلى ما يقابلها من الأعداد*:

* المترجمان: التقابل الذي استخدمه المؤلف هو

A	B	C	D	…	X	Y	Z
1	2	3	4		24	25	26

الحرف F يقابل العدد 6 والحرف L يقابل العدد 12 والحرف A يقابل العدد 1 والحرف T يقابل العدد 20 . وبهذا فإن $6\ 12\ 1\ 20 \mapsto$ FLAT. لنفرض الآن أن الرسالة الواضحة هي:SEE THE HOG

تتم عملية التعمية بإزاحة الحرف الأول S ستة حروف إلى اليمين (العدد المقابل لأول حروف مفتاح التعمية). وبهذا فالحرف S يعمى إلى Y. بعد ذلك نقوم بإزاحة الحرف الثاني E بـ 12 حرفًا إلى اليمين ليقابل Q. الآن، نقوم بإزاحة الحرف الثالث E حرفًا واحدًا إلى اليمين ليقابل الحرف F (لاحظ أن الحرف الثالث E من النص الواضح لم يقابل الحرف المعمى Q الذي يقابل الحرف الثاني E من النص الواضح). وبعد ذلك نقوم بإزاحة الحرف الرابع T، 20 حرفًا إلى اليمين ليقابل الحرف N*.

نكون الآن قد استنفدنا حروف مفتاح التعمية. ولتكملة عملية التعمية نبدأ في استخدام حروف كلمة المفتاح من جديد لتعمية ما تبقى من حروف النص الواضح: نقوم بإزاحة H ست حروف إلى اليمين ليقابل N، إزاحة E 12 حرفًا إلى اليمين ليقابل Q، إزاحة H حرفًا واحدًا إلى اليمين ليقابل I، إزاحة O إلى اليمين 20 حرفًا ليقابل I. وأخيرًا نقوم بإزاحة G ستة حروف إلى اليمين ليقابل M. وبهذا تكون الرسالة المعماة المقابلة للرسالة الواضحة "SEE THE HOG" باستخدام نظام فيجينير بمفتاح تعمية "FLAT" هي: "YQF NNQ IIM". جد الرسالة الواضحة للرسالة المعماة :

CPTOTXTCVPCNNCTWXPU

إرشادك هو أن مفتاح التعمية كلمة مكونة من حرفين وأننا حذفنا الفراغات بين كلمات النص.

---

* المترجمان: لاحظ أن العدد المقابل للحرف T هو العدد 20 والعدد المقابل للحرف الرابع T من مفتاح التعمية هو 20 أيضًا. بالجمع نجد أن المطلوب هو إيجاد الحرف المقابل للعدد 40 في الهجائية ابتداءً من الحرف T وهذا هو الحرف N (المقابل للعدد 14).

الفصل الثامن

الحياة الواقعية
Real Life

(٠,٨) ملحوظات استهلالية
Introductory Remarks

إن المسائل المشتقة من الحياة الواقعية تكون في العادة مسائل معقدة وهي غالبًا تحتاج إلى أفكار وترميز خاص، وفي أحيان كثيرة لا تحتوي هذه المسائل على قياسات أو صياغات دقيقة. ولذلك، يحتاج المحلل والمتعدي لحلِّ هذه المسائل إلى بعض التخمينات والتقريبات ليتمكن من صياغة المسألة المطلوب حلها. أحيانًا، نحتاج إلى كميات كبيرة من البيانات قبل التمكن من صياغة السؤال. ولهذه الأسباب نرى أن موقع هذه المسائل ليس كتابًا بسيطًا ومختصرًا مثل هذا الكتاب.

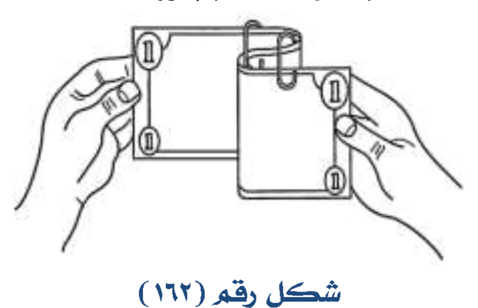
لذا، فإن الغرض من هذا الفصل هو تقديم بعض المسائل المصاغة بأسلوب غير رياضي، لكن يسهل إعادة صياغتها رياضيًّا ومن ثم حلّها. فإذا وجدت أن بعض المسائل سهلة جدًّا فالسبب يرجع إلى الملاحظات السابقة. هذه المسائل مقدمة فقط لغرض التدريب واكتساب الخبرة.

(١,٨) عناصر يومية
Everyday Objects

نقدم هنا مسائل متنوعة من المحيط الذي نعيش فيه. الإستراتيجية الأساسية هنا هي النظر إلى الأشياء المألوفة بطريقة جديدة. لا تقيد نفسك بما هو شائع أو واضح. قاوم الإغراء عند رؤيتك لمسألة بالقول: "إن هذه مجرد خدعة بسيطة" لأنها ليست كما تظن. إنها الطريقة الصحيحة للنظر إلى الأشياء.

مسألة(٨,١,١)

يبين الشكل رقم (١٦٢) دولارًا مشبوكًا بالطريقة المبينة بمشبكي ورق. إذا سحبنا طرفي الدولار بقوة لفصله عن المشبكين فإن الدولار سينفصل عن المشبكين، لكن المشبكين سيرتبطان ببعضهما البعض. ما السبب وراء ذلك؟



شكل رقم (١٦٢)

الحل:

قم بسحب طرفي الدولار ببطء ثم راقب ما الذي يحصل مع المشبكين. يمكن أن ترى ذلك بالاستعانة بقطعة نقد (انظر: الشكل رقم ١٦٣).



شكل رقم (١٦٣)

الذي يحصل هو أنك تقوم بسحب أحد المشبكين بين طرفين مستدقين للمشبك الآخر، وبهذا يتم ربطهما. الهزة الأخيرة للدولار تقذف المشبك الأمامي أعلى الدولار ليرتبط بالمشبك الخلفي وينتج عن ذلك تحرير الدولار وربط المشبكين. □

مسألة(٨,١,٢)

بيّن كيف يمكنك إجراء قطع في قطعة من الورقة طولها 5 بوصات وعرضها 3 بوصات بحيث تستطيع العبور من خلال هذا القطع ؟

الحل:

الشكل رقم (١٦٤) يبين كيفية إجراء هذا القطع.

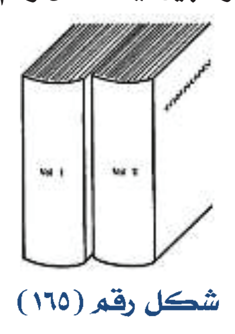


شكل رقم (١٦٤)

بعد الانتهاء من القطع نقوم بسحب القطعتين بلطف لتتشكل حلقة محيطها حوالي أربع أقدام وهي كافية لوضع قدميك خلالها إذا كنت حذرًا. □

مسألة (٨,١,٣)

وضعنا مجلدي كتاب صعود وسقوط الإمبراطورية الرومانية لمؤلفه جيبن (Gibbon) على رف مكتبة كما هو مبين في الشكل رقم (١٦٥).



شكل رقم (١٦٥)

سمك غلاف كل منهما $\frac{1}{8}$ بوصة. سمك صفحات كل منهما (500 صفحة للمجلد الواحد) يساوي 2 بوصة. تريد دودة صغيرة الحجم إحداث ثقب في أي مكان بين

المجلدين لتتمكن من الزحف على جميع صفحات المجلدين (من الصفحة الأولى للمجلد الأول إلى صفحة المجلد الثاني الأخيرة). كم طول الثقب الذي تحتاج عمله الدودة لإنجاز رحلتها؟

الحل:

كما هو مبين في الشكل رقم (١٦٥)، المجلد الأول يقع على اليسار والثاني على اليمين. لاحظ أن الدودة تحتاج فقط ثقب الغلافين المتلاصقين فقط وهما الغلاف الأمامي للمجلد الأول والغلاف الخلفي للمجلد الثاني. أي أن طول الثقب هو $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ بوصة. □

مسألة تحدي(٨,١,٤)

لنفرض أن لدينا طبعة ثانية من كتاب جيبن مكون من 4 مجلدات. سمك كل غلاف هو $\frac{1}{8}$ بوصة، لكن سمك ورق كل من المجلدات هو 1 بوصة. ما طول الثقب الذي تحتاجه الدودة لتتمكن من الزحف من أول صفحات المجلد الأول إلى آخر صفحات المجلد الرابع؟

مسألة (٨,١,٥)

رسمنا دائرة نصف قطرها يقع بين 2 بوصتين و 4 بوصات على قطعة من الورق. لدينا مربع مصنوع من البلاستيك طول ضلعه 10 بوصات. من دون استخدام المسطرة والفرجار كيف يمكن تحديد مركز الدائرة؟

الحل:

هذه المسألة هي مسألة إنشاء باستخدام المسطرة والفرجار ولكن من دون الفرجار. كل ما بإمكاننا عمله هو استخدام حواف المربع لرسم خط مستقيم وزاوية قائمة.

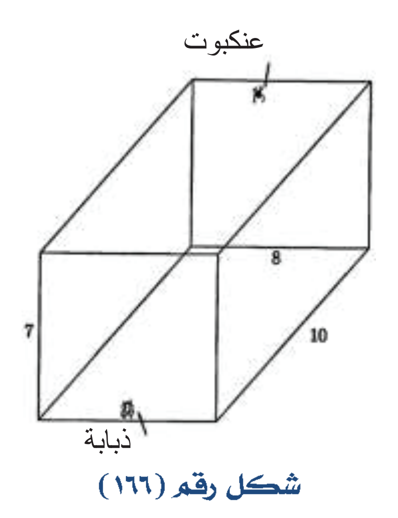
ثبت إحدى زوايا المربع بحيث تمس الدائرة من الداخل ثم ارسم زاوية قائمة داخل الدائرة. ولكننا نعلم من الحقائق الهندسية أن الزاوية القائمة تقابل نصف دائرة. لذا فإن نقطتي تقاطع المربع مع الدائرة هما طرفا قطر في الدائرة (تعمدنا عدم تزويدك بشكل لتقوم برسم الشكل بنفسك). استخدم حافة المربع لرسم هذا القطر. أعد الخطوات السابقة لرسم قطر آخر. الآن، نقطة تقاطع القطرين هي مركز الدائرة. □

مسألة تحدي (٨,١,٦)

إذا استبدلنا المربع في المسألة السابقة بمثلث متساوي الأضلاع مصنوع من البلاستيك فهل يمكن تحديد مركز الدائرة في هذه الحالة؟

مسألة (٨,١,٧)

طول غرفة 10 قدم وعرضها 8 قدم وارتفاعها 7 قدم. يجثم عنكبوت على جدار بعديه 7×8 ويبعد 6 بوصات عن السقف وفي منتصف الجدارين المتجاورين. تقف ذبابة على الجدار المقابل على بعد 6 بوصات من أرض الغرفة وفي منتصف الجدارين المتجاورين (انظر: الشكل رقم ١٦٦).

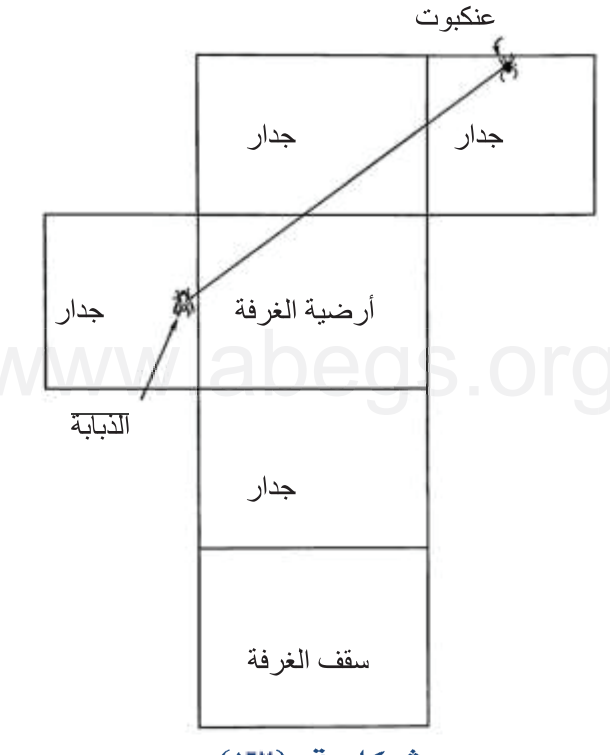


شكل رقم (١٦٦)

قدر العنكبوت التخطيط لاصطياد الذبابة بهدوء وذلك بالسير على جدارات، أرض الغرفة، سقف الغرفة. ما أقصر ممر ممكن يحتاجه العنكبوت للوصول إلى الذبابة؟

الحل:

أعد تركيب الغرفة كما هو مبين في الشكل رقم (١٦٧).



شكل رقم (١٦٧)

أقصر مسافة من العنكبوت إلى الذبابة هي مسافة مستقيمة كالمبينة في الشكل. لاحظ وجود طرق أخرى لإعادة تركيب الغرفة ومن ثم توجد مسافات خطية أخرى يمكن أن يسلكها العنكبوت للوصول إلى الذبابة. جرب هذه الطرق واقنع نفسك أن الممر المبين في الشكل رقم (١٦٧) هو الأقصر. □

يوضح حل المسألة السابقة مبدأ مهماً: ليس بالضرورة محاولة الوصول إلى حل مسألة كما هي معطاة. حاول إعادة صياغتها حتى تتمكن من فهمها.

مسألة تحدي (٨,١,٨)

أعد حل المسألة السابقة إذا كان العنكبوت والذبابة يقفان على زاويتين متقابلتين (أحدهما على زاوية السقف والآخر على الزاوية الأرضية المقابلة).

مسألة (٨,١,٩)

لديك قارورة قاعدتها إما دائرية أو مربعة وجوانبها مستقيمة. وضعنا سائلاً في القارورة (حوالي نصف حجمها) كما هو مبين في الشكل رقم (١٦٨). عنق القارورة مستدق (كما هو الشكل المتعارف عليه للقوارير) ثم قفلناها بغطاء محكم. كيف يمكن إيجاد حجم القارورة باستخدام مسطرة فقط؟

الحل:

لاحظ أن مفتاح الحل للمسألة هو إيجاد حجم الجزء المستدق من القارورة وهو أمر صعب جداً حتى مع وجود أدوات قياس دقيقة. إن المعلومة التي لدينا (يكتنف استخدامها بعض الغموض) هي كمية السائل في القارورة. كيف يمكن استخدام هذه المعلومة؟

أولاً، استخدم المسطرة لقياس القاعدة (سواء كانت المربعة أو الدائرية) ثم احسب مساحتها ولتكن A. الآن، استخدم المسطرة لقياس ارتفاع السائل وليكن h. احسب حجم السائل في القارورة وهو $V = A \times h$.

الآن، اقلب القارورة كما هو مبين في الشكل رقم (١٦٩)



شكل رقم (١٦٨) شكل رقم (١٦٩)

لاحظ أن السائل سيملأ الجزء المستدق من القارورة (الجزء الصعب القياس) والجزء الفارغ (مملوء بالهواء) هو عبارة عن أسطوانة. الآن استخدم المسطرة لإيجاد ارتفاع الجزء الفارغ وليكن h'. احسب حجم الجزء الفارغ وليكن $V' = A \times h'$. إذن حجم القارورة هو $v = V + V'$.

مسألة (١٠،١،٨)

سيارة جديدة مزودة بثلاثة أجهزة (وسائل) لتوفير استهلاك الوقود. يوفر الجهاز A نسبة 25% من الاستهلاك ويوفر الجهاز B نسبة 45% من الاستهلاك ويوفر الجهاز C نسبة 30% من الاستهلاك.

لنفرض أننا شغلنا الأجهزة الثلاثة معًا وأن تأثيرها مستقلاً. هل تكون نتيجة ذلك توفير $25 + 45 + 30 = 100$ في المائة من الاستهلاك؟ هذه الإجابة غير ممكنة. لماذا؟

الحل:

قبل حل هذه المسألة يكون من الأنسب الرجوع إلى التمرين رقم (٢٦) من تمارين الفصل السادس.

بالتأكيد الإجابة 100% غير ممكنة وذلك للمبدأ البسيط وهو استحالة الحصول على طاقة من العدم. أما التحليل الصائب فهو على النحو التالي: عند تشغيل الجهاز A فإنه يستهلك 0.75 من الوقود الذي سيستهلكه المحرك من دون تشغيل أي

الأجهزة. عند تشغيل الجهاز B فإنه يستهلك 0.55 من الوقود المستخدم لقطع المسافة نفسها. وعند تشغيل الجهاز C فإنه يستهلك 0.70 من الوقود لقطع المسافة نفسها. لذا فإن كمية الوقود المستهلكة لقطع المسافة نفسها عند تشغيل الأجهزة الثلاثة هي $0.75 \times 0.55 \times 0.70 = 0.28875$ إذن، كمية التوفير الكلية هي $1 - 0.28875 = 0.71125$ أو 71.125% من استهلاك الوقود. □

مسألة (١١,١,٨)

يتم تحضير كوكتيل البرتقال والليمون بخلط k جزء من عصير البرتقال مع جزء واحد من عصير الليمون. يحتوي عصير البرتقال على 40% لب البرتقال ويحتوي عصير الليمون على 20% لب الليمون.

نقول: إن كوكتيل البرتقال والليمون "ممتاز" إذا احتوى على القليل من عصير الليمون. على سبيل المثال، إذا كان $k = 15$ فإن الكوكتيل "ممتاز". أما إذا كان $k = 5$ فنقول: إن الكوكتيل "علاجي". بعض الأشخاص لا يفضلون تناول الكوكتيل الممتاز على اعتبار أنه يحتوي كمية كبيرة من اللب والبعض الآخر يفضل تناول الكوكتيل الممتاز لأنه طعمه أفضل. ناقش ذلك بحساب نسبة اللب في الكوكتيل الممتاز مقارنة بنسبة اللب في الكوكتيل العلاجي.

الحل:

دعنا ندرس أولاً الكوكتيل العلاجي. إنه مكون من 6 أجزاء، 5 أجزاء عصير برتقال وجزء عصير ليمون. كل جزء من أجزاء عصير البرتقال يحتوي على 40% لب. أي أنه يحتوي على $2 = 5 \times 0.4$ جزء لب. أما جزء عصير الليمون فيسهم بمقدار $0.2 = 1 \times 0.2$ من الجزء لب. إذن، يحتوي الكوكتيل العلاجي على 2.2 جزء من كل 6 أجزاء. أي نسبة اللب في الكوكتيل العلاجي هي $\frac{2.2}{6} = 36.67\%$.

أما عدد أجزاء الكوكتيل الممتاز يساوي 16، 15 جزءاً من البرتقال وجزءاً واحداً

من الليمون. عدد أجزاء اللب في هذا الكوكتيل فهي $0.4\times15+0.2\times1=6.2$. لذا فنسبة اللب في هذا الكوكتيل هي $\frac{6.2}{16}=38.75\%$. وهذه ليست أعلى بكثير من نسبة اللب في الكوكتيل العلاجي. □

مسألة (١٢,١,٨) طريقة الاتصالية*

هي إحدى الطرائق المهمة جداً في الرياضيات. سبق وأن قدمنا أمثلة عليها في البند رقم (٣,٢). إنها تثبت وجود حل لبعض المسائل من دون إنشاء هذا الحل.

نركز اهتمامنا على نوع من المسائل يدعى "مسائل ساندويشات اللحم المدخن". ومع أن هذا النمط من المسائل يظهر على أنها تحتوي على بعض العبثية، لكنها في الحقيقة نماذج أولية لعدد من المسائل المهمة في التبولوجيا والهندسة.

أولى هذه المسائل: افرض أن لدينا كمية من اللحم المدخن ثنائي البُعد موضوعاً في المستوى على أي شكل من الأشكال (يمكن أن يكون على شكل نجمة أو مربع أو مجرد كتلة ليس لها شكل معين) كما هو مبين في الشكل رقم (١٧٠).



شكل رقم (١٧٠)

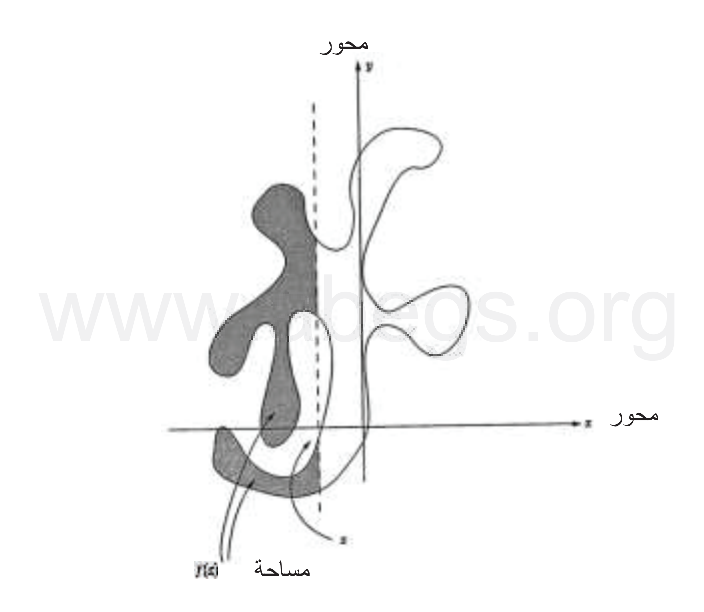
هل يوجد قطع رأسي (يوازي محور y) بحيث يقسم اللحم المدخن إلى مساحتين متساويتين؟

* المترجمان: الاسم الشائع لها هو طريقة البرهان غير الإنشائي (الوجودي).

الحل:

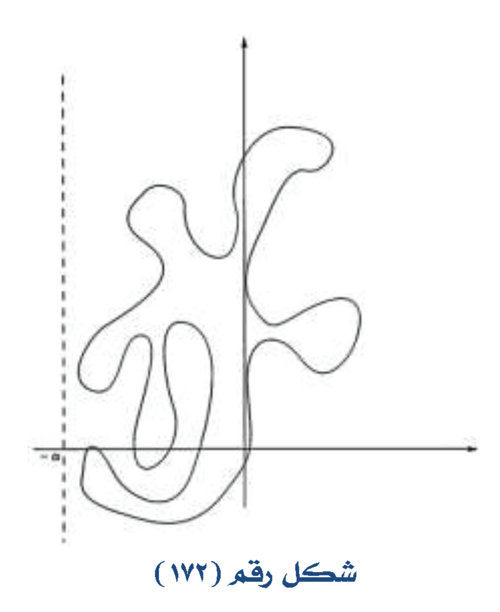
الفكرة الأساسية لحلِّ هذه المسألة هو إيجاد دالة متصلة ومن ثم الاستفادة من خصائص الدوال المتصلة. لنفرض أن مساحة اللحم المدخن تساوي 1 وتقع داخل منطقة محدودة في المستوى (أي أن اللحم المدخن هو كما تراه في الواقع):

لكل x على المحور الأفقي، نفرض أن $f(x)$ هي مساحة اللحم المدخن الواقعة إلى يسار المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة x (انظر: الشكل رقم ١٧١).



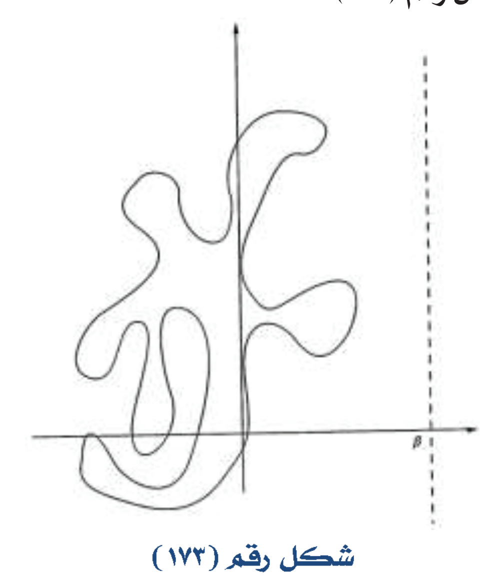
شكل رقم (١٧١)

لاحظ أنه إذا كانت قيمة x سالبة كفاية (ولتكن $x=-\alpha$) فإن المستقيم الرأسي يقع إلى اليسار من اللحم المدخن ويكون $f(x)=0$ (أي لا يوجد لحم مدخن على يسار المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة x) كما هو مبين في الشكل رقم (١٧٢).



شكل رقم (١٧٢)

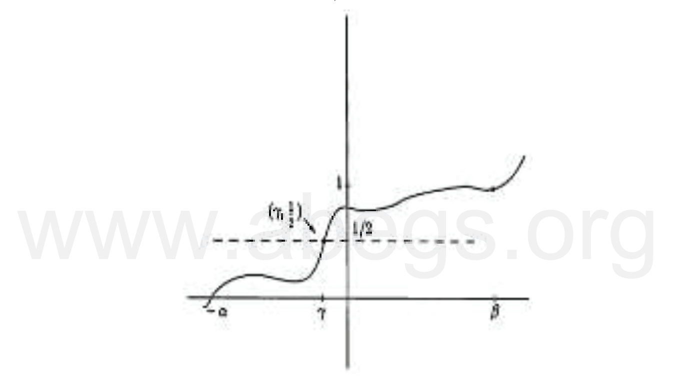
ومن ناحية أخرى إذا كانت قيمة x موجبة كفاية (ولتكن $x = \beta$) فإن جميع اللحم المدخن يقع على يسار المستقيم الرأسي المار بالنقطة x . وبذلك يكون $f(x) = 1$. انظر : الشكل رقم (١٧٣).



شكل رقم (١٧٣)

الآن f دالة متصلة. إن ذلك يعني أنه عند تحريك x قليلاً فإن قيمة $f(x)$ تتغير قليلاً. حاول إقناع نفسك أن هذا صحيح (التفسير الرياضي الدقيق لذلك يحتاج إلى موضوع متقدم في الرياضيات وهو نظرية المقياس).

تذكر أن الدالة المتصلة التي مجالها فترة هي دالة يمكن رسم بيانها من دون رفع القلم عن الورقة. أي أن بيانها لا يحتوي على قطع أو قفزات. الآن، بيان دالتنا يمر بالنقطتين $(-\alpha,0)$ و $(\beta,1)$. وبما أنه متصل فإنه سيقطع المستقيم $y=\frac{1}{2}$ مرة واحدة على الأقل كما هو مبين في الشكل رقم (١٧٤).

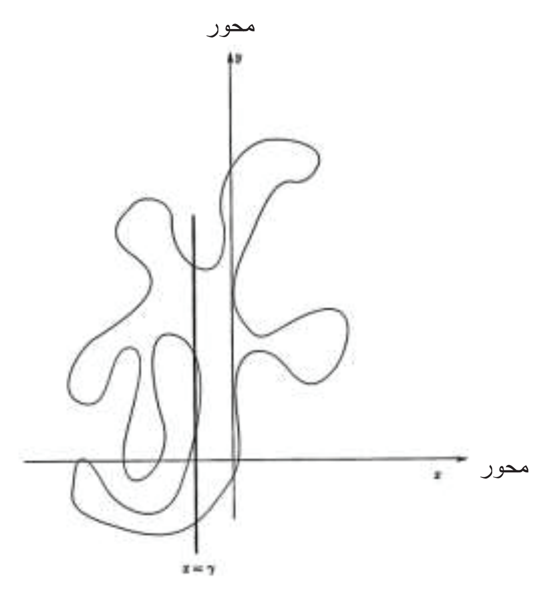


شكل رقم (١٧٤)

لنفرض أن نقطة التقاطع هذه هي:

$$\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)$$

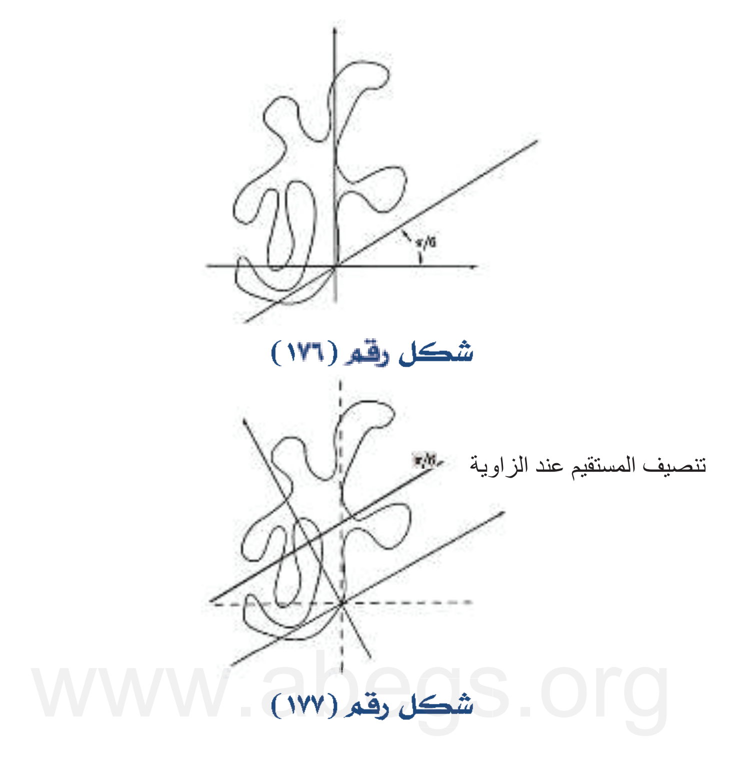
إذا كانت $x=\gamma$ فإن $f(x)=\frac{1}{2}$. إن هذا يعني أن نصف مساحة اللحم المدخن تقع على يسار المستقيم الرأسي $x=\gamma$. ولكن هذا يعني أيضاً وقوع نصف مساحة اللحم المدخن الأخرى على يمين $x=\gamma$ وهذا مبين في الشكل رقم (١٧٥).



شكل رقم (١٧٥)

وبهذا نكون قد أكملنا حلّ المسألة ولكن دون أن تنشئ المستقيم الرأسي الذي ينجز المهمة. □

هل توجد ميزة خاصة يتمتع بها المستقيم الرأسي المستخدم في حلّ المسألة السابقة؟ الإجابة هي"لا". لو أخذنا على سبيل المثال، مستقيماً يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور السينات كما هو مبين في الشكل رقم (١٧٦)، فإننا نقوم بتدوير المحاور كما هو مبين في الشكل رقم (١٧٧)، وبعد ذلك نقدم الحل السابق للمسألة للمحاور الجديدة، وبعد الانتهاء من الحل نقوم بتدوير المحاور إلى الوضع الأصلي. لذا، إذا كان θ_0 أي اتجاه فإنه يمكن إيجاد مستقيم في هذا الاتجاه يقسم كمية اللحم المدخن إلى نصفين.



شكل رقم (١٧٦)

شكل رقم (١٧٧)

مسألة (١٣،١،٨)

نقوم الآن بتوسيع المسألة السابقة. لنفرض أن لدينا كمية من اللحم المدخن تأخذ أي شكل وكمية من الخبز. للسهولة، نفرض أن هاتين الكميتين في المستوى الإقليدي كما هو مبين في الشكل رقم (١٧٨).



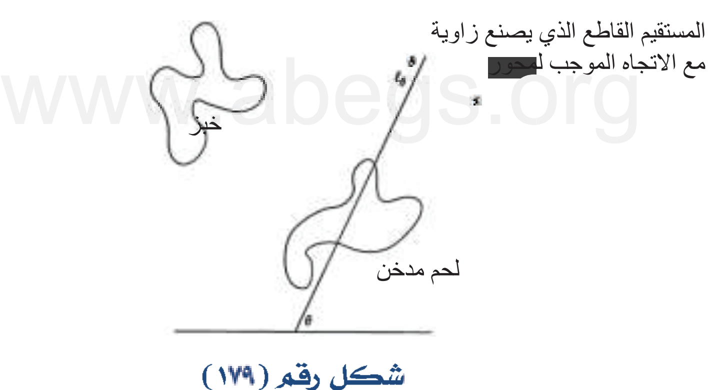
شكل رقم (١٧٨)

هل يمكن إيجاد مستقيم واحد يقسم كل من مساحة اللحم المدخن ومساحة الخبز معًا إلى مساحتين متساويين؟

الحل:

نبني الحل على ما تعلمناه في المسألة السابقة. وللسهولة، نفرض أن شكل وموقع اللحم المدخن والخبز هو كما مبين في الشكل رقم (١٧٨). نفرض أن مساحة اللحم المدخن تساوي 1 ومساحة الخبز تساوي b (هذه الأرقام لا تؤثر في الحلّ). كما يمكن حلّ المسألة بالطريقة نفسها لأي شكل.

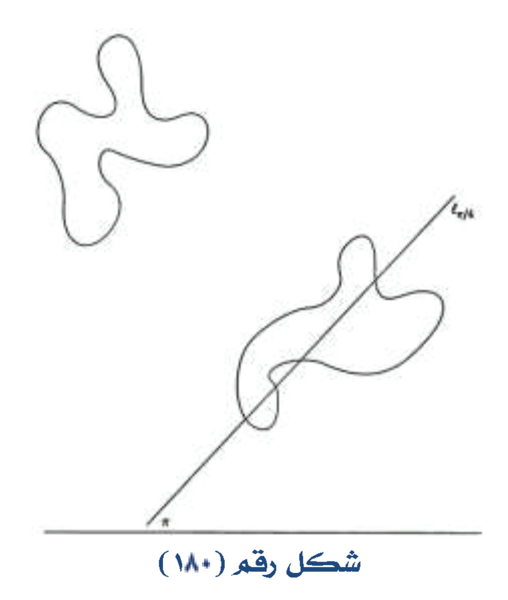
مرة أخرى، ننشئ دالة متصلة. نفرض أن ℓ_θ هو المستقيم باتجاه الزاوية θ الذي ينصف مساحة اللحم المدخن لكل $0 \leq \theta \leq \pi$ مقاسة بالراديان (انظر: الشكل رقم ١٧٩).



شكل رقم (١٧٩)

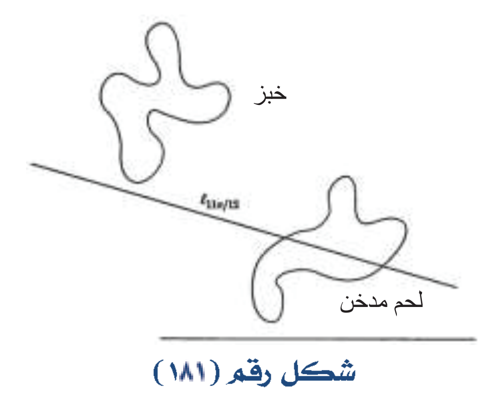
بينا في الفقرة بعد حلِّ المسألة السابقة أن مثل هذا المستقيم موجود. نفرض الآن أن $g(\theta)$ هي مساحة الخبز أعلى وإلى يسار ℓ_θ.

من الشكل رقم (١٨٠) نجد أن $b = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. أي أن كل كمية الخبز تقع أعلى وإلى يسار المستقيم $\ell_{\frac{\pi}{4}}$ الذي ينصف مساحة اللحم المدخن.



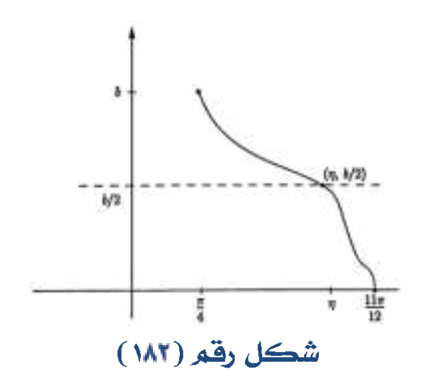
شكل رقم (١٨٠)

أيضًا، $g\left(\frac{11\pi}{12}\right)=0$. أي أنه لا توجد أي كمية من الخبز تقع أعلى وإلى يسار المستقيم $\ell_{\frac{11\pi}{12}}$ كما هو موضح في الشكل رقم (١٨١).



شكل رقم (١٨١)

وبصورة مماثلة للمسألة السابقة نجد أن g دالة متصلة وأن $g(\frac{\pi}{4})=b$ و $g\left(\frac{11\pi}{12}\right)=0$ والشكل رقم (١٨٢) يبيّن بيان الدالة المتصلة g التي تحقق ذلك.


شكل رقم (١٨٢)

بما أن بيان الدالة المتصلة منحنى غير متقطع فإن هذا البيان يقطع المستقيم الأفقي $y = \frac{b}{2}$ عند نقطة ما ولتكن η (انظر: الشكل رقم ١٨٢). إذن، $g(\eta) = \frac{b}{2}$.

من ذلك نرى أن المستقيم ℓ_η الذي أنشأناه لتصنيف كمية اللحم المدخن ينصف أيضًا كمية الخبز ونكون قد انتهينا. □

من الجدير ذكره هنا هو أنه إذا أخذنا كمية ثالثة ولتكن "جبنًا" مثلاً إضافة إلى اللحم المدخن والخبز فمن المستحيل إيجاد مستقيم واحد في المستوى ينصف الكميات الثلاث معًا. إن هذا لا يعتمد على الشكل فمن الممكن أخذ كل من الكميات على شكل قرص دائري ومع ذلك من غير الممكن إيجاد مثل هذا المستقيم. نترك محاولة ذلك للقارئ.

إن مثل هذه المسائل هي في الحقيقة مسائل تعتمد على البُعد فإذا وضعنا اللحم المدخن والخبز والجبن في فضاء ثلاثي البعد فيكون من الممكن إيجاد مستوى يقسم حجم كل من الكميات الثلاث معًا إلى نصفين. ولكن برهان ذلك يحتاج إلى موضوعات متقدمة ولن نتطرق له هنا. ومع ذلك فإننا ندعو القارئ إلى إجراء بعض المحاولات لإقناع نفسه.

(٨,٢) دراسة بعض الحالات
Some Case studies

نقدم في هذا البند بعض الدراسات العلمية المأخوذة من الإنتاج الأكاديمي. الغرض الذي نسعى إليه هو رؤية تطبيقات حياتية على أساليب حل المسائل. ندعوك للتفكير ومناقشة زملائك لغرض تعرّف أي من أساليب الحلِّ تمَّ استخدامه أو من الممكن استخدامه لكل من المسائل المقدمة.

مسألة (٨,٢,١) [خطط انتخابية مختلفة]

وصلت نظرية الانتخابات إلى مراحل متقدمة. إن الهدف من نظرية التصويت هو إيجاد نظام انتخاب يعكس رغبات الناخبين. قدم أرو (Arrow)، انظر [ARR] مبرهنة تنص على أنه يمكن التلاعب في أي نظام انتخابي. إن ذلك يعني أنه يمكن للناخب أن يدلي بصوته (ليس بالضرورة للمرشح المفضل لديه) بأسلوب يهدف إلى خسارة بعض المرشحين المنافسين وزيادة فرصة الفوز لمرشحه المفضل. وكنتيجة لمبرهنة أرو لا يوجد الآن ولن يوجد نظام انتخابي تام (غير قابل للتلاعب).

نقارن في هذه المسألة بين ثلاثة أنظمة انتخابات:

(i) طريقة الأغلبية.

(ii) طريقة بوردا (Borda).

(iii) طريقة هار (Hare).

نقدم في تمارين هذا الفصل تدريبات إضافية على هذه الطرق.

لنفرض أن لدينا ثلاثة مرشحين C, B, A لخوض الانتخابات. نشرح الآن الطرق الانتخابية الثلاث على هؤلاء المرشحين.

الطريقة (i) هي الأبسط: المرشح الذي يحصل على أكبر عدد من الأصوات يفوز.

الطريقة (ii): يقوم كل من الناخبين بترتيب المرشحين أول، ثاني، ثالث. يتم حساب متوسط رتب كل من المرشحين. يفوز المرشح الذي يحصل على أكبر متوسط.

الطريقة (iii): يقوم كل من الناخبين بترتيب المرشحين أول، ثاني، ثالث. إذا لم يحصل أي من المرشحين على رتبة "أول" في الغالبية العظمى للأصوات فإنه يتم حذف المرشح الذي حصل على أقل عدد من رتبة "أول". تعطى أصوات هذا المرشح للمرشحين الآخرين على النحو التالي: إذا كان ترتيب المرشح "الثاني" للناخب الذي أعطاه صوته فإن هذا المرشح يأخذ هذا الصوت.

نقدم الآن مثالاً لتوضيح هذه الطرق والمقارنة بينها.

الحل:

نفرض أن المرشحين هم C, B, A وأن عدد الناخبين 33. وسنعالج الطرق الثلاث معاً. نفترض أن كل من الناخبين أدلى بصوته وأن كل من الناخبين رتب المرشحين الثلاثة. نتيجة ذلك مبنية في الجدول التالي:

الترتيب	عدد الناخبين
ABC	10
ACB	4
BAC	2
BCA	7
CAB	3
CBA	7

من السطر الأول في الجدول، نرى أن 10 ناخبين رتبوا A "أول"، B "ثاني"، C "ثالث". ومن السطر الثاني نرى أن 4 ناخبين رتبوا A "أول"، B "ثاني"، C "ثالث" وهكذا.

الطريقة (i): 14 ناخبًا يفضلون A (من السطرين الأول والثاني) و 9 ناخبين

يفضلون B (السطران الثالث والرابع) و 10 ناخبين يفضلون C (السطران الخامس والسادس). المرشح الذي حصل على أكبر عدد من الأصوات هو A. وبهذا فإن A يفوز بالانتخابات بطريقة الأغلبية.

الطريقة (ii): تحتاج هذه الطريقة إلى بعض التفكير. نفرض أن المرشح يأخذ 3 نقاط لكل ناخب أعطاه رتبه "الثالث" السطر الأول من الجدول يبين 10 ناخبين. من ذلك عدد نقاط A هو $30 = 3 \times 10$ وعدد نقاط B هو $20 = 2 \times 10$ وعدد نقاط C هو $10 = 1 \times 10$. وبالاستمرار على هذا المنوال نجد أن العدد الكلي من النقاط لكل من المرشحين بطريقة بوردا هو:

$$A = 10 \times 3 + 4 \times 3 + 2 \times 2 + 7 \times 1 + 3 \times 2 + 7 \times 1 = 66$$
$$B = 10 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times 3 + 7 \times 3 + 3 \times 1 + 7 \times 2 = 68$$
$$C = 10 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 1 + 7 \times 2 + 3 \times 3 + 7 \times 3 = 64$$

متوسط رتب A يساوي $\frac{66}{33}$ ومتوسط رتب B يساوي $\frac{68}{33}$ ومتوسط رتب C يساوي $\frac{64}{33}$. وبهذا يفوز المرشح B حسب طريقة بوردا.

الطريقة (iii): من الواضح عدم حصول أيًا من المرشحين على ترتيب "أول" للغالبية العظمى من الناخبين. نقوم بحذف B لأنه حصل على أقل عدد من الترتيب "أول". اثنان من الناخبين الذين أعطوا ترتيب "أول" للمرشح B أعطوا أيضًا ترتيب "ثاني" للمرشح A. لذا نعطي A هذا الصوتان. 7 من الناخبين الذين أعطوا ترتيب "أول" للمرشح B أعطوا أيضًا ترتيب "ثاني" للمرشح C. لذا يأخذ C سبع أصوات من B. الآن، مجموع أصوات A الكلية هو $16 = 2 + 14$ ومجموع أصوات C الكلية هو $17 = 7 + 10$. لهذا فإن C يفوز بالانتخابات حسب طريقة هار.

مما سبق نجد أن الطرق الثلاث للانتخابات أدت إلى فوز ثلاثة مرشحين مختلفين باستخدام العدد نفسه من الأصوات. في التمارين سنطلب منك تقديم طرق للتلاعب بأنظمة الانتخابات المقدمة.

مسألة (٢,٢,٨)

لاحظت بعض الدراسات الاجتماعية أن معظم الأشخاص الذين يرتكبون جرائم ينتمون إلى عائلات عدد أفرادها أكبر من المتوسط. تقترح هذه الدراسات (على الأقل ضمنيًّا) أنه يتوجب علينا أن نفهم كيفية تأثير العائلات الكبيرة على أطفالهم مما يؤدي إلى دفع هؤلاء الأطفال للانخراط في نشاطات إجرامية.

إحدى مبادئ الإحصاء المهمة تؤكد أن جميع النتائج الإحصائية تتغير بتغير وجهة النظر أو طريقة أخذ العينة أو الطريقة الإحصائية التي استخدمت للتوصل إلى النتيجة. في هذه المسألة نقدم تحليلاً تقترح نتيجته إلى أن معظم الأشخاص (وليس فقط مرتكبي الجرائم) ينتمون إلى عائلات عدد أعضائها أكبر من المتوسط.

الحل:

للسهولة، نفرض أن عدد عائلات الدراسة يساوي 20 وأن 19 منها لديها طفل واحد وعائلة واحدة لديها طفلان. نقوم الآن بالإجابة عن السؤال المطروح لهذه العائلات ولتجنب البيانات غير الضرورية نركز على عدد الأطفال.

عدد الأطفال الكلي هو $21 = 2 + 19$. عدد العائلات هو 20. متوسط عدد الأطفال في العائلة الواحدة هو $\frac{21}{20}$. نقوم الآن بحساب متوسط حجم العائلة التي ينتمي إليها الطفل. لاحظ أننا غيرنا وجهة النظر هنا: كانت وجهة النظر في الإحصاء الأول "لكل عائلة"، أما الآن فإن وجهة النظر هي "لكل طفل". إن هذا مهم جدًّا عند إجراء التحليل الإحصائي.

عدد الأطفال 21، 19 منهم ينتمون إلى عائلات كل منها لديه طفل واحد. طفلان منهما ينتميان إلى عائلة لديها طفلان. إذن، متوسط حجم العائلة هو:

$$\frac{19 \times 1 + 2 \times 2}{21} = \frac{23}{21}$$

لاحظ أن $\frac{21}{20} > \frac{23}{21}$. إن هذا يعني بالضبط أنه في المتوسط معظم الأطفال ينتمون إلى عائلات عدد أطفالها أعلى من المتوسط. □

مسألة تحدي (٣،٢،٨)

هل يمكن عمل تحليل مختلف للمسألة السابقة تكون نتيجته أنه في المتوسط، معظم الأطفال ينتمون إلى عائلات عدد أطفالها أقل من المتوسط؟

مسألة (٤،٢،٨)

نحصل على العديد من المحيرات والألغاز من عدم فهمنا لموضوع "الاحتمال الشرطي". الاحتمال الشرطي هو احتمال وقوع الحدث A إذا علمت أن الحدث B قد وقع. أفضل طريقة لفهم ذلك هو تقديم مثال.

لنفرض أنك أجريت اختبارًا للكشف عن أحد أنواع مرض السرطان. أخبرك الطبيب المعالج أن نسبة الدقة في هذا الاختبار هي 95%. جاءت نتيجة الاختبار إيجابية (بلغة الطب هذا يعني أن الاختبار أشار إلى أنك مريض بهذا النوع من المرض). إذا لم تقم بتحليل الوضع تحليلاً سليمًا فإنك تستنتج أن النسبة بأن تكون مصابًا بهذا المرض هي 95%. إن هذا ليس صحيحًا. في الحقيقة إن احتمال أن تكون مصابًا بالمرض أقل من ذلك بكثير. قبل أن نفسر السبب وراء ذلك، نؤكد أن فهمك لتفسير مثل هذه الأوضاع ليست فقط مجرد تسلية. في هذه الأيام العديد من المؤسسات تطلب من موظفيها والمتقدمين الجدد للوظائف تزويد الشركة بعينة بول لاختبارها لمعرفة إذا كنت تتعاطى أدوية ممنوعة. إذا كانت دقة الاختبار هي 95% وكانت نتيجة

اختبارك إيجابية فإنه من المهم لك ولمحاميك أن تفهم ماذا يعني ذلك. كما أن معظم شركات التأمين الصحي ترفض تقديم بوليصة تأمين لشخص مالم يخضع لاختبار حمله لفيروس HIV (فيروس السيدا). الملاحظة السابقة تنطبق أيضًا هنا: كل اختبار دقيق بنسبة معينة. لذا يكون من المهم للشخص الذي تكون نتيجة الاختبار الذي أجراه (وأيضًا للشركة التي طلبت إجراء هذا الاختبار) إيجابية أن يفهم ما معنى هذه القراءات.

الحل:

نقدم حل المسألة لبيانات معينة. لنفرض أن دقة الاختبار هي 95% . ماذا يعني ذلك؟ يعني أن 95% من جميع الاختبارات صحيحة. وهذا يعني أن 95% من جميع الاختبارات السلبية صحيحة. وأن فهم هاتين الحقيقتين البسيطتين هو مفتاح الحل.

مرة أخرى نفرض أنه تم إجراء الاختبار على عينة من المجتمع عددها 20000 ولنفرض أن 1% من مجتمع العينة هم فعلاً مصابين في المرض. أي أن $200 = 20000 \times \frac{1}{100}$ شخصًا من العينة مصابون بالمرض. وبما أن دقة الاختبار هي 95% فإن نتيجة 95% من هؤلاء الـ 200 شخص ستكون إيجابية ونتيجة 5% منهم ستكون سلبية. أي أن 190 شخصًا ستكون نتيجة اختبارهم إيجابية و 10 أشخاص ستكون نتيجة اختبارهم سلبية.

وباستخدام التحليل نفسه نعلم أن 19800 شخص من العينة أصحاء. ستكون نتيجة 95% منهم سلبية ونتيجة 5% إيجابية، أي 18810 أشخاص ستكون نتيجة اختبارهم سلبية و 990 شخصًا ستكون نتيجة اختبارهم إيجابية.

مما سبق نجد أن $1180 = 990 + 190$ شخصاً ستكون نتيجة اختبارهم إيجابية وأن $18820 = 18810 + 10$ ستكون نتيجة اختبارهم سلبية. إذن، احتمال أن تكون مصابًا بالمرض إذا علمت أن نتيجة اختبارك إيجابية هو:

$$\frac{\text{عدد الأشخاص المصابين والذين نتيجة اختبارهم إيجابية}}{\text{عدد الأشخاص الذين كانت نتيجة اختبارهم إيجابية}} = \frac{190}{1180} \approx 0.161$$

و بالمقارنة، احتمال أن تكون نتيجة اختبارك إيجابية إذا علمت أنك مصاباً بالمرض هو:

$$\frac{\text{عدد الأشخاص الذين كانت نتيجة اختبارهم إيجابية ومصابون بالمرض}}{\text{عدد الأشخاص المصابين بالمرض}} = \frac{190}{200} \approx 0.95$$

لاحظ أن الفرق بين هذين الاحتمالين كبير جدًّا. فإذا أجريت الاختبار من دون معرفة مسبقة بأنك مصاب بالمرض وكانت نتيجة الاختبار إيجابية فإن فرصة إصابتك بالمرض هي في الحقيقة 16.1%. ولكن إذا كنت على علم مسبق بأنك مصاباً بالمرض فإن احتمال أن تظهر نتيجة اختبارك إيجابية هي 95%.

فكرة حل هذه المسألة هي تطبيق على مبرهنة بيز (Bayes theorem) للاحتمال الشرطي. □

(٣,٨) الإحصاء
Statistics

يحتاج جزء كبير من التفكير التحليلي الحديث إلى استخدام الإحصاء حيث يستخدم الإحصاء في دراسة البيانات الطبية والاستفتاءات السياسية ودراسة نتائج الاختبارات السيكولوجية ولتحديد دقة استخدام البصمات لتحديد هوية الشخص والعديد العديد من المجالات. نستخدم في الإحصاء عينة من المجتمع لغرض الحصول على نتائج تتعلق بالمجتمع ككل. في هذا البند نستعرض كلا الاستخدامين للإحصاء وهما الاستخدام الذي يؤدي إلى نتائج صحيحة والآخر الذي يؤدي إلى نتائج زائفة.

مسألة (١,٣,٨)

يوجد ادعاء بعدم وجود وقت للطفل لكي يذهب إلى المدرسة، والأسباب هي كما يلي:

- يحتاج الطفل إلى 8 ساعات نوم يوميًا. أي 121.67 يوميًا من 365 يوم في السنة.
- يحتاج الطفل إلى 3 ساعات يوميًا للأكل. أي 45 يومًا في السنة.
- يأخذ الطفل 90 يومًا إجازة صيفية.
- يأخذ الطفل 21 يومًا إجازة أعياد خلال السنة.
- يأخذ الطفل يومين إجازة في الأسبوع. أي 104 أيام في السنة.

وبجمع هذه الأيام (مقربة إلى يوم) نجد أن مجموعها $382 = 104 + 21 + 90 + 45 + 122$ يومًا في السنة. وهذا أكبر من عدد أيام السنة. ولهذا نستنتج عدم وجود وقت للطفل للذهاب إلى المدرسة. ما الخطأ في هذا التبرير؟

الحل:

سنقدم فقط بعض الإرشادات التي ستقود إلى خطأ هذا التبرير. خلال إجازة الصيف ومدتها 90 يومًا فإن الطفل ينام ويأكل أيضًا. وبهذا قمنا بحساب ذلك مرتين. أيضًا، ينام الطفل في إجازة نهاية الأسبوع. ولهذا بحساب الأوقات الزائدة التي أدخلناها في التبرير أعلاه يمكن تقديم تبرير صائب يبين عدد الأيام التي تبقى بحيث يستخدمها الطفل للذهاب إلى المدرسة. □

مسألة تحدي (٢,٣,٨)

في إحدى معارك الحرب بين الإسبان والأمريكان التي حدثت عام 1898 كان معدل الوفيات بين القوات البحرية 9 لكل ألف. وفي الفترة نفسها كان معدل الوفيات بين سكان مدينة نيويورك 16 لكل ألف. هذه إحصاءات دقيقة. ما الذي تستخلصه من

هذه الأرقام؟ هل الانضمام إلى القوات البحرية أكثر أمناً من التقاعد والسكن في مدينة نيويورك؟ هل معدل الجريمة في مدينة نيويورك مرتفعاً لدرجة أنك تفضل أن تخوض معركة بدلاً من السير في شوارع نيويورك؟ أعط عدداً من التبريرات لهذه المسألة؟

مسألة (٣،٣،٨)

يمتلك أربعة شركاء شركة صغيرة عدد موظفيها 120 . الراتب السنوي لكل من الشركاء هو 100000 دولار والراتب السنوي لكل من الموظفين هو 12000 دولار. الأرباح السنوية للشركة هي 240000 تقسم بالتساوي على الشركاء. جد نموذجين إحصائيين مختلفين للتقرير المالي السنوي للشركة.

الحل:

أبسط تقرير يمكن التفكير به (ويمكن القول إنه أكثر التقارير صواباً) هو:

١. الراتب السنوي لكل من الموظفين هو 12000 دولار.

٢. يتقاضى كل من الشركاء مبلغ 100000 دولار كراتب سنوي و 60000 دولار أرباح سنوية. وبهذا فإن كل منهم يحصل على 160000 دولار سنوياً.

المشكلة في التقرير السابق أنه يظهر أن الدخل السنوي لكل من الشركاء يساوي حوالي 13.333 ضعفاً للدخل السنوي للموظف. أيضاً يحصل كل شريك على أرباح بنسبة 500% من راتب الموظف. هذه الأرقام لها انعكاسات سلبية على سمعة الشركة.

من المؤكد وجود عدد من طرق الحسابات الأخرى التي يمكن اتباعها لتحسين صورة الشركة. من الممكن القول إن كل من الشركاء يتقاضى 100000 دولار كرواتب سنوية ويحصل على 40000 دولار كمكافئة سنوية ويحصل على 20000 دولار كأرباح سنوية. وبهذا يمكن إظهار التقرير على النحو التالي:

$$\text{متوسط الرواتب} = \frac{120 \times 12000 + 4 \times 140000}{120 + 4} = 16129.03$$

وأرباح كل من الشركاء يساوي 20000 . هذا التقرير أفضل من التقرير السابق (لغرض تحسين صورة الشركة). متوسط الرواتب هو $\frac{4}{3}$ راتب الموظف وهذا مناسب لأنه يفترض أن يكون راتب صاحب العمل أكبر من راتب الموظف. وأرباح كل من الشركاء يساوي 20000 دولار. وبهذا يظهر مجموع الأرباح على أنه يساوي 80000 دولار. وبمقارنة ذلك مع 2000000 دولار التي تدفع كرواتب نجد أن نسبة الأرباح إلى نسبة الرواتب صغيرة. وبهذا تظهر هذه الشركة للجمهور على أنها شركة تهتم بشؤون موظفيها على حساب الأرباح التي يجنيها أصحابها. □

مسألة (٤,٣,٨)

هذه مسألة قديمة ومشهورة، يحتوي نصها على شيء من العبثية: ما احتمال أن يحتوي النفس التالي الذي ستتنفسه على جزيء من النفس الذي خرج من يوليوس قيصر عندما صرخ صرخته المشهورة "حتى أنت يا بروتس"؟

هناك أمران حول هذه المسألة: الأول منهما هو إمكانية إنشاء نموذج رياضي لهذه المسألة وحلها، والثاني وهو المفاجئ، أن احتمال مشاركتك النفس مع يوليوس قيصر هو احتمال كبير. نسبت هذه المسألة بداية إلى جيمس جينز (James Jeans)، انظر [JEA] وتمت دراستها مفصلاً من قبل [LIT]، [PAUL1]، [REN]. الحل الذي نقدمه هنا مشتق من هذه المصادر.

الحل:

أولاً، يجب أن نستخدم بعض الفرضيات. الفرضية الأولى هي أن النفس الأخير ليوليوس قيصر موزع توزيعاً منتظماً في الغلاف الجوي. الفرضية الثانية هي أن جميع جزئيات الهواء الذي يتكون من ذلك النفس لا زالت موجودة في الغلاف الجوي. أي أنها

لم تتشتت إلى جزيئات غير معلومة في الكون ولم يتم تحليلها وتفاعلها مع عناصر أخرى (على سبيل المثال، لم تتم أكسدتها). والفرضية الأخيرة هي أن جزيئات الهواء موزعة توزيعًا متساويًّا في الغلاف الجوي (هذا ليس صحيحًا تمامًا لأن الغلاف الجوي يصبح أكثر نقاء كلما ارتفعنا عن سطح الأرض ولكن على ارتفاعات قريبة من سطح الأرض حيث نسكن فإن هذه الفرضية معقولة).

نحتاج إلى بعض المعلومات نأخذها من المراجع التي ذكرناها. أولاً، بالرجوع إلى الفيزياء والكيمياء نستطيع الحصول على كتلة الغلاف الجوي وقيمة عدد أفوغادرو (Avogadro's number) والوزن الجزيئي الغرامي للغلاف الجوي فنجد أن عدد جزيئات الغلاف الجوي هو 10^{44} جزيئات. الوزن الجزيئي الغرامي لأي غاز في درجة حرارة قياسية يساوي 22.4 ليترًا ويحتوي على 6×10^{23} جزيئًا. أثبتت التجارب أن النفس يحتوي في المتوسط على 0.4 ليترًا من الهواء. ولهذا فمتوسط عدد الجزيئات في النفس هو $0.4 \times \frac{1}{22.4} \times 6 \times 10^{23} = 1.0714 \times 10^{22}$ جزيئًا. إذن، حساب الاحتمال مسألة سهلة: نفسك التالي يحتوي على 1.0714×10^{22} جزيئًا وآخر نفس ليوليوس قيصر احتوى على 1.0714×10^{22} جزيئًا، وأن هذه الجزيئات تختلط في جو يتكون من 10^{44} جزيئًا. ما احتمال أن يتقاطع النفسان (أي أن يشتركا في جزيء واحد على الأقل)؟

بداية، نجيب عن ذلك إجابة غير دقيقة. عدد جزيئات النفس يساوي تقريبًا 10^{22}. يحتوي الجو على 10^{44} جزيئات هواء. أي يوجد 10^{22} أنفاس في الجو كل منها يحتوي على 10^{22} جزيئات. فعلى افتراض أن آخر نفس للقيصر الذي يحتوي على 10^{22} جزيئات موزعة توزيعًا متساويًّا وعشوائيًّا في الغلاف الجوي فإنه يوجد على الأرجح جزئ واحد من نفس القيصر الأخير في كل نفس آخر (لأنه يوجد جزيء من نفس القيصر في كل نفس آخر في الغلاف الجوي). من ذلك نرى أنه غالبًا ما يحتوي نفسك التالي على جزيء من نفس القيصر الأخير.

نقوم الآن بحساب ذلك بدقة. ولإجراء ذلك، نجد من حساباتنا السابقة المقربة أن الغلاف الجوي يحتوي على $10^{44}-10^{22}$ جزئيات لا تنتمي إلى نفس القيصر الأخير. إذن، احتمال أن يشترك جزيء من نفسك التالي مع جزيء من نفس القيصر الأخير هو:

$$\frac{10^{44}-10^{22}}{10^{44}}=1-10^{-22} \qquad (*)$$

إذن، احتمال ألا بشترك أي جزيء من أجزاء نفسك التالي مع أي جزيء من نفس القيصر الأخير هو:

$$(1-10^{-22})^{10^{22}} \qquad (**)$$

(عدد الجزيئات في نفسك التالي هو 10^{22} واحتمال كل منها هو $1-10^{-22}$).

العقبة الآن هي: إذا أدخلت العدد $1-10^{-22}$ على الآلة الحاسبة فإنك نحصل على الإجابة 1 (لأن دقة معظم الحاسبات الآلية هي 10 منازل على الأكثر). ولكن من المؤكد أن العدد $(1-10^{-22})^{10^{22}}$ لا يساوي 1. ومن ثم كيف نتمكن من حساب قيمة هذا العدد؟ دقة معظم لغات البرمجة مثل FORTRAN هي على الأكثر 8 منازل عشرية وتكون 16 منزلة عشرية إذا استخدمنا أسلوب الدقة المضاعفة. ما المخرج؟

مما سبق نرى أن الآلات الحاسبة والحاسبات الآلية لا يمكن الاعتماد عليها كبديل للرياضيات النظرية. لذا فإن الرياضيات النظرية هي الأداة الوحيدة التي توفر لنا مخرجًا (يمكن أن تجرب استخدام برامج الحاسبات الجبرية مثل: MATHEMATICA).

الآن، من المعلوم أن $\left(1-\frac{1}{k}\right)^k$ يؤول إلى $\frac{1}{e}$ (انظر: أحد كتب الجدول مثل [CRC]) عندما $k\to\infty$ حيث $e\approx 2.718\ldots$ هو عدد أويلر. أيضًا من المعلوم أن $\left(1-\frac{1}{k}\right)^k$ هو تقريب للعدد $\frac{1}{e}$ بدقة k منزلة عشرية. العدد $(1-10^{-22})^{10^{22}}$ هو هذا

العــدد عنــدما يكــون $k = 10^{22}$. إذن، نســتنتج أن احتمــال ألا يشــترك نفســنا التــالي بجزيء مع نفس القيصر الأخير هو:

$$(1-10^{-22})^{10^{22}} \approx \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.718} = 0.368 .$$

ولهذا فإن احتمـال أن يشترك جزيء مـن نفسك التـالي مـع جـزيء مـن نفس القيصر الأخير هو:

$$1-0.368 = 0.632 . \qquad \square$$

مسألة تحدي (٨,٣,٥)

افرض عدم معرفتك بعدد أويلر e . هل تستطيع إيجاد طريقة أخرى لتقدير $(1-10^{-22})^{10^{22}}$ ؟ [إرشاد: استخدم اللوغاريتمات].

تمارين على الفصل الثامن

(١) سكة حديد طولها ميل واحد (5280 قدم) منشأة على أرض منبسطة تماماً. بعد فترة من إنشائها وبفعل درجات حرارة الجو المرتفعة تمدد حديد السكة بمقدار قدم واحد فقط مع بقاء طرفيها مثبتين. نتج عن هذا التمدد تقوس دائري في السكة ليصبح طولها 5281 قدماً. كم يبلغ ارتفاع سكة الحديد عن الأرض عند نقطة المركز؟ [إرشاد: باستخدام طرق حسابية يدوية تستطيع التوصل إلى الحل، لكن يتطلب ذلك أن تعلن عن الأدوات الحسابية التي استخدمتها، أو أن تستخدم أداة حسابية أكثر دقة مثل CAD. أسلوب آخر لحل هذه المسألة يكون باستخدام طريقة نيوتن. ناقش هذه المسألة مع الآخرين]. أخذت هذا المسألة من [HAL].

(٢) تناول صحيفة اقتصادية واقرأ إحدى صفحاتها. ابدأ بكتابة أول مائة عدد صحيح تجدها في هذه الصفحة. على سبيل المثال، مقالة تبين أنه ازدادت قيمة أسهم "داو جونز" 27 في المتوسط لتصل إلى 3542 نقطة. اكتب العددين 27 و 3542. الآن، رتب الأعداد التي كتبتها بحيث تكون الأعداد التي خانتها الأخيرة (الخانة ذات القيمة الكبرى) 1 أولاً ثم الأعداد التي خانتها الأخيرة 2 بعد ذلك وهكذا. تحليل غير دقيق للوضع يقترح أن حوالي $\frac{1}{9}$ الأعداد خانتها الأخيرة 1 و $\frac{1}{9}$ الأعداد خانتها الأخيرة 2 وهكذا (لاحظ عدم وجود أعداد خانتها الأخيرة 0. وبهذا فإن نسبة الأعداد التي خانتها الأخيرة 1 أكبر من $11.111111\cdots\%$. هل تستطيع تقديم تحليل لتبرير هذه النتيجة؟ إليك بعض الإرشادات: لكل عدد N من 1 إلى 100، احسب عدد الأعداد الصحيحة

$i(N)$ من 1 إلى N التي خانتها الأخيرة 1 ثم احسب النسبة $\frac{i(N)}{N}$. لاحظ أن هذه النسبة هي دائماً على الأقل $\frac{1}{9}$. أعد الخطوة السابقة للأعداد N من 101 إلى 1000. ستجد أن هذه النسبة هي أيضًا على الأقل $\frac{1}{9}$. هل يمكنك استنتاج نمط ؟

الآن، لكل عدد صحيح K جد متوسط مجموعة الأعداد $\left\{\frac{i(1)}{1}, \frac{i(2)}{2}, \ldots, \frac{i(K)}{K}\right\}$. لهذه المتوسط نهاية عندما $K \to \infty$. ما هي؟ هل تستطيع إيجاد حد أدنى لهذه النهاية؟ هل تستطيع إيجاد قيمة هذه النهاية؟

(٣) اذهب إلى المكتبة (أو أبحث في الإنترنت) لتحديد شكل وأبعاد جبل فوجي (Mt. Fuji)*. قدم تحليلاً للزمن اللازم لنقل (إزاحة) جبل فوجي إلى موقع يبعد عن موقعه الحالي 100 ميل باستخدام شاحنات. [إرشاد: يجب أن يكون التحليل الذي ستقدمه مقنعًا. فمثلاً، لا يمكنك افتراض أن بإمكان شاحنة نقل ميل مكعب من الأرض. كما لا يمكنك افتراض امتلاكك لمليون شاحنة]. يمكن الرجوع إلى [RENZ] و [PAUL1] للمزيد من التفاصيل عن هذه المسألة.

(٤) ما احتمال أن نستنشق في نفسك التالي جزئيًا من زفير النفس الأخير لحصان السباق المشهور "بسكوت البحر" قبل موته؟ قدم تحليلاً للإجابة عن هذا السؤال. تحتاج إلى معرفة عدد لترات الهواء الموجودة في نفس حصان السباق. بإمكانك أيضًا استخدام أفكار المسألة (٤,٣,٨).

---

* المترجمان: يقع جبل فوجي في جزيرة هوشو اليابانية جنوب غرب طوكيو. شكله مخروطي، وهو أعلى جبل في اليابان يصل ارتفاعه عن سطح البحر 3776.24 (12398 قدماً) ويبعد عن طوكيو مسافة 60 ميلاً.

(٥) يتغير مصروف البيت بتغير ثمن الحليب والخبز. في العام الماضي كان ثمن ربطة الخبز نصف دولار وثمن لتر الحليب دولار واحد. في هذا العام أصبح ثمن ربطة الخبز دولار واحد وثمن لتر الحليب نصف دولار. قدم تحليلاً يبين زيادة في مصروف البيت لهذا العام. قدم تحليلاً يبين انخفاض في مصروف البيت لهذا العام. قدم تحليلاً تبين فيه عدم تغير المصروف لهذا العام.

(٦) بين أحد الاستفتاءات ارتباط كبير بين المدخنين من طلاب الجامعة وانخفاض درجاتهم. من ذلك يمكن استنتاج وجود علاقة بين التدخين والدرجات المنخفضة. أو أن عدم التدخين سيؤدي إلى درجات مرتفعة. اقترح ثلاثة أسباب تجعل هذا الاستنتاج خاطئاً.

(٧) في صباح كل يوم أقوم بشراء شيئًا بمبلغ 99 سنتًا وبيعه في المساء بمبلغ دولار واحد. استمر هذا الوضع على مدار عام واحد. قدم تحليلاً تبين فيه أن نسبة الربح على مجمل المبيعات تساوي 1% . قدم تحليلاً آخر تبين فيه أن نسبة الربح على المبلغ المستثمر تساوي 365% .

(٨) استخدمت الشركة المنتجة لأحد أنواع الأقلام الجافة الذي ثمنه ريال واحد الإعلان التالي: يمكن أن يستمر القلم بالكتابة لرسم مستقيم طوله ميل واحد. هل هذا إعلان ناجح ؟ كم عدد الصفحات التي يمكن كتابتها بهذا القلم؟

(٩) ما معدل نمو الشعر مقاساً بالميل لكل ساعة ؟

(١٠) اقترضت مبلغ 100 دولار من بنك بنسبة أرباح بسيطة تساوي 6% في السنة. ما قيمة الدفعة الشهرية التي ستدفعها للبنك؟ [إرشاد: افرض أن الدفعة الشهرية تساوي $\frac{1}{12}$ من المبلغ. نسبة الأرباح الشهرية ليست ثابتة].

(١١) دقة أحد اختبارات الكشف عن أحد الأمراض الجنسية تساوي 98% . هذا يعني أنه إذا كان الشخص مصاباً بالمرض وأجرى الاختبار فإن 98% من المرات

ستظهر نتيجة الاختبار إيجابية. وأما إذا كان الشخص غير مصاب بالمرض وأجرى الاختبار فإن 98% من المرات ستظهر نتيجة الاختبار سلبية. أجرى أحمد الاختبار وكانت النتيجة إيجابية. ما احتمال أن يكون أحمد مصابًا بالمرض؟ (افترض أنه من المعلوم أن 0.5% من المجتمع مصابين بالمرض وأن عدد أفراد عينة المجتمع الذين اعتمدت عليهم هذه المعلومة هو 100000).

نفرض الآن أن أحمد أجرى الاختبار مرتين وكانت النتيجة سلبية في المرتين. ما احتمال أن يكون أحمد مصابًا بالمرض؟

(١٢) تشير بعض الدراسات إلى أن دقة اختبار الكشف عن الكذب هي 75% . قدم تحليلاً مشابهًا للتمرين (١١) تبين فيه معنى عدم نجاحك في اختبار الكشف عن الكذب.

(١٣) يدرس ياسر في جامعة الملك فهد للبترول والمعادن في الظهران. يقطن والديه في مدينة الرياض ويقطن جده في مدينة الجبيل. وعندما يقرر أحمد زيارة والديه في الرياض أو زيارة جده في الجبيل يذهب إلى إحدى محطات انتظار الحافلات حيث تتوقف الحافلتان المتجهتان إلى الرياض والجبيل عند المحطة بانتظام (كل عشرين دقيقة). يستقل أحمد الحافلة التي تأتي أولاً سواء كانت متجهة إلى الرياض أو إلى الجبيل. بعد مرور عامين، اكتشف أحمد أن عدد زياراته لوالديه يساوي تسعة أمثال عدد زياراته لجده. كيف يمكن أن يحدث ذلك ؟*

(١٤) يحتاج سامي إلى عشر ساعات لطباعة عدد من الصفحات. ويحتاج جمال إلى خمس ساعات لطباعة العدد نفسه من الصفحات. كم يحتاج الاثنان معًا لطباعة العدد نفسه من الصفحات ؟

* المترجمان: ترجم هذا التمرين بتصرف.

(١٥) عاش الفيلسوف والرياضي الألماني المشهور كانْت (Kant) حياتــه (بين 1724 و 1804) في مدينة كونغسبيرغ ويقال إنه لم يغادرها مطلقـًا. هذه المسألة تسمى "ساعة كانْت": مارس كانْت رياضة المشي يوميًا حيث يبدأ المشي صباح كل يوم في الوقت نفسه ويسير دائمـًا في الطريق نفسه واشتهر بانتظام خطواته بحيث إن الزمن الذي يستغرقه بالمشي يوميًا هو نفسه. في أحد الأيام توقفت ساعة كانْت ولم يكن يملك غيرها. بعد مدة زمنية قصيرة ذهب مشيـًّا لزيارة صديق له. بقي فترة زمنية عند صديقه ثم عاد إلى بيته مباشرة سالكـًا الطريق نفسه. عند وصوله إلى البيت تمكن من ضبط ساعته لتشير إلى الوقت الصحيح. كيف تمكن من ذلك؟ [إرشاد: هذه مسألة منطق وليست لغزًا سخيفًا].

(١٦) لنفرض أن عدد سكان الولايات المتحدة الأمريكية 2500 مليون ولنفرض أن كل شخص يعرف 1500 شخص آخرين موزعين عشوائيـًّا في الولايات. التقى شخصان عشوائيـًّا في محطة قطار. ما احتمال وجود شخص ثالث يعرفه هذان الشخصان؟ لنفرض الآن أن شخصين A و B التقيا عشوائيـًّا. ما احتمال وجود شخصين آخرين α و β بحيث A يعرف α و B يعرف β و α يعرف β؟

(١٧) صمم نموذج إحصائي للإجابة عن السؤال: ما أرجحية وجود شخصين في مدينة نيويورك لهما العدد نفسه من شعر الرأس؟ [إرشاد: تحتاج لمعرفة عدد سكان نيويورك ومتوسط عدد شعر رأس الشخص].

(١٨) اللعبة هي إلقاء قطعة نقود عدد من المرات حتى تحصل على "صورة". إذا لم تحصل على صورة قبل الرمية 15 فإنك تكسب مليون دولار أما إذا حصلت على صورة قبل الرمية 15 فإنك تخسر 10 دولارات. هل في صالحك أن تخوض هذه اللعبة؟ ما احتمال فوزك؟ كيف تقارن ذلك مع شروط اللعبة؟

(١٩) توقعت محطة الأرصاد الجوية يوم الأربعاء أن فرصة هطول أمطار يوم الخميس هي 50% وفرصة هطول أمطار يوم الجمعة هي 50% . ما احتمال هطول المطر في نهاية الأسبوع ؟ [يجب أن تدقق في معنى فرصة هطول مطر 50% لأنه من الخطأ أن تستنتج أن فرصة هطول مطر في نهاية الأسبوع ستكون 100%].

(٢٠) ما معدل ازدياد طول طفل حديث الولادة بالكيلومتر في الدقيقة؟ [إرشاد: يجب أن تكون على علم بمعدل نمو الأطفال بالنسبة إلى وحدات معينة ومن ثم الإجابة عن هذا السؤال].

(٢١) إذا سحبت دم جميع سكان الولايات المتحدة الأمريكية الأحياء ثم سكبته في نادي بوش الواقع في سانت لويس فكم يكون ارتفاع الدم؟ [إرشاد: ما عدد سكان الولايات المتحدة الأمريكية؟ كم باينت (الباينت وحدة وزن تساوي نصف كوارت أو ثمن غالون) دم في جسم الإنسان؟ كم قدمًا مكعبًا في الباينت؟ ما مساحة نادي بوش؟]

(٢٢) إذا نزعت شعر رأسك ووضعته في مستقيم بحيث تكون بداية الشعرة عند نهاية التي قبلها فما الطول الذي تحصل عليه؟

(٢٣) عند دراسة خبير لسلوك العاملين في مطعم للمأكولات السريعة لاحظ أن أحد العاملين في المطعم يسقط 30% من فطائر الهامبرجر التي يقدمها للزبائن. ما احتمال أن يسقط هذا العامل أربع فطائر بالضبط من بين الفطائر العشر التالية التي سيقدمها للزبائن؟

(٢٤) عجلة مكتوب عليها الحروف A, B, C, D, E, F . نقوم بتدوير العجلة وعند توقفها نكتب الحرف الظاهر. دورنا العجلة 100 مرة وكتبنا الحروف التي ظهرت كمتتالية. ما احتمال أن تظهر إحدى الكلمات التالية: BAD أو CAD أو DAD أو FAD أو BED أو DAB أو FED ؟

(٢٥) كم عدد الأشخاص الذين يجب أن يسكنوا في مجمع سكني كبير قبل أن نستطيع الحصول على شخصين لهم العدد نفسه من شعر الرأس؟ كم شخصاً نحتاج قبل أن يكون احتمال وجود شخصين لهما العدد نفسه من شعر الرأس أكبر من $\frac{1}{2}$ ؟

(٢٦) إحدى خطط النصب والاحتيال المشهورة والتي لا زالت متبعة على متداولي شارع الأسهم في مدينة نيويورك يتم تنفيذها على النحو التالي: يقوم المحتال يوم الاثنين بكتابة 1000 رسالة إلى مجموعة مكونة من 1000 متداول مختلف يتوقع فيها ارتفاع أسهم شركة $XOLYTL$ المتحدة في تداولات يوم الخميس، ويكتب 1000 رسالة أخرى إلى مجموعة ثانية مكونة من 1000 متداول مختلف يتوقع فيها انخفاض أسهم شركة $XOLYTL$ المتحدة في تداولات يوم الخميس.

بعد انتهاء تداولات يوم الخميس المزعوم، انخفضت أسهم شركة $XOLYTL$ المتحدة.

يركز الآن المحتال على المجموعة الثانية ويتجاهل المجموعة الأولى. يقوم بتقسيم هذه المجموعة إلى مجموعتين كل منها تتكون من 500 متداول. يكتب رسالة لكل متداول في المجموعة الأولى يتوقع فيها ارتفاع أسهم شركة أردوفارك العالمية خلال تداولات يوم الخميس القادم ويكتب لمتداولي المجموعة الثانية توقعه بانخفاض أسهم شركة أردوفارك العالمية خلال تداولات يوم الخميس القادم. أقفل سوق الأسهم ليوم الخميس هذا بارتفاع أسهم شركة أردوفارك العالمية.

يركز المحتال الآن على المجموعة الأولى وينسى المجموعة الثانية. يقوم بتقسيم المجموعة الأولى إلى مجموعتين تتكون كل منهما من 250 متداولاً

ويكتب رسالة لكل متداول في المجموعة الأولى يتوقع فيها ارتفاع أسهم شركة بلنك خلال تداولات الخميس القادم ويكتب رسالة لكل متداول في المجموعة الثانية يتوقع فيها انخفاض أسهم شركة بلنك خلال تداولات الخميس القادم.

بعد تداولات يوم الخميس يكون لدى المحتال مجموعة مكونة من 250 متداولاً كل منهم يعتقد أن هذا الشخص (المحتال) لديه القدرة على توقع نشاطات سوق الأسهم، والبرهان على ذلك أنه أرسل لكل منهم ثلاث رسائل متتالية بتوقعات صحيحة. يقوم الآن بإرسال رسالة لكل من هؤلاء المتداولين وعددهم 250 يخبرهم فيها أنه الآن جاهز للتوقع الكبير الذي سيعود عليهم بالمال الوفير، ولكنه هذه المرة سيأخذ منهم أجرة توقعه. إذا كانت تكلفة كل من الرسائل التي أرسلها المحتال هي دولار فما هو المبلغ الذي سيطلبه من كل متداول من مجموعة المتداولين البالغ عددهم 250 لكي يحقق أرباحًا قيمتها 100000 دولار ؟

(٢٧) أشهر خطط التحايل على الإطلاق هي خطة "بونزي -Ponzi" نسبة إلى المحتال بونزي الذي عاش في الفترة بين عامي 1877 و 1949 . المثال التالي يوضح هذه الخطة: لنفرض أن جهاز حاسب آلي مفضل لدى عدد كبير من المستخدمين يباع في السوق بمبلغ 10000 دولار. يقوم بونزي باستقطاب الضحية بأن يخبره بأنه يستطيع بيعه الجهاز بمبلغ 5000 دولار فقط على أن يدفعها الآن نقدًا ويستلم جهازه بعد شهرين من الآن. لحد الآن لا يظهر أن هناك أي سوء نية في الموضوع ولكن الذي لا يعلمه الضحية هو التالي:

(i) إن بونزي فعليًا يشتري الجهاز بمبلغ 10000 دولار.

(ii) طلبات الشراء للجهاز من بونزي عادة تساوي ثلاثة أمثال عمليات توصيل الجهاز إلى الزبون.

لنفرض أن طلبات الشراء في الشهر الأول تساوي 10، لكن بونزي لن يرسل أي جهاز إلى الزبائن هذا الشهر. طلبات الشراء في الشهر الثاني 20 وبهذا يكون مجموع الطلبات في نهاية الشهر الثاني هو 30 جهازًا قبض ثمنها $150000 = 30 \times 5000$ ولكنه أرسل للزبائن 10 أجهزة بمبلغ $100000 = 10000 \times 10$. لذا يتبقى لديه ربحًا مقداره 50000 دولار.

من الواضح في هذا الخطة أنه إذا أراد بونزي أن يحقق أرباحًا فعليه أن يختفي بعد فترة زمنية معينة دون إرسال عدد كبير من الطلبات إلى أصحابها.

صمم خطة بونزي بحيث يحصل بونزي في نهاية عام واحد على أرباح تقدر بمليون دولار.

(٢٨) إذا كان عدد المؤمن عليهم لدى شركة تأمين متخصصة في التأمين ضد الإصابات الرياضية يساوي 50000 عميل فإن الشركة تتوقع بناءً على جداولها المالية:

i. الدفع لحالتين مبلغ 20000 دولار لكل منهما.

ii. الدفع لعشرين حالة مبلغ 10000 دولار لكل منها.

iii. الدفع لمائتي حالة مبلغ 1000 دولار لكل منها.

iv. الدفع لألف حالة مبلغ 250 دولار لكل منها.

احسب متوسط مدفوعات الشركة ثم حدد قيمة بوليصة التأمين من أجل أن يكون صافي أرباح الشركة مليون دولار في نهاية العام.

(٢٩) يوجد تنافس كبير بين الصياد حسن والصياد مرعي. لذا فكل منهما يذهب للصيد منفردًا. في العام 1987 كان متوسط عدد السمكات التي اصطادها حسن في الرحلة الواحدة يفوق متوسط عدد السمكات التي اصطادها مرعي في الرحلة الواحدة. وكذلك الأمر في العام 1988 . ولكن عند حساب متوسط عدد السمكات في العامين 1987 و 1988 معًا كان متوسط عدد السمكات

التي اصطادها مرعي في الرحلة الواحدة يفوق عن متوسط عدد السمكات التي اصطادها حسن في الرحلة الواحدة. كيف يكون ذلك ممكناً ؟

(٣٠) هذه مسألة "حجر النرد المحرَف" وتنسب إلى برادلي إيفرون (Bradley Efron)، انظر: [PAUL1]. لدينا:

حجر النرد α : أعداد وجوهه هي $4, 4, 4, 4, 0, 0$.

حجر النرد β : أعداد وجوهه هي $3, 3, 3, 3, 3, 3$.

حجر النرد γ : أعداد وجوهه هي $2, 2, 2, 2, 6, 6$.

حجر النرد δ : أعداد وجوهه هي $5, 5, 5, 1, 1, 1$.

تتم لعبة حجر النرد هذه على النحو التالي: يقوم كل من اللاعبين برمي حجر النرد الذي يملكه. الفائز هو من يظهر عدداً أكبر على حجره من العدد الذي يظهر على حجر نرد منافسه. اثبت ما يلي: احتمال فوز الحجر α على الحجر β يساوي $\frac{2}{3}$ ، واحتمال فوز الحجر β على الحجر γ يساوي $\frac{2}{3}$ ، واحتمال فوز الحجر γ على الحجر δ يساوي $\frac{2}{3}$. الآن، بما أنه من المرجح فوز α على β وفوز β على γ وفوز γ على δ فإن α سيفوز على δ . و.لكن في الحقيقة إن احتمال فوز δ على α يساوي $\frac{2}{3}$. أثبت ذلك.

(٣١) تنص مبرهنة أرو على عدم وجود خطة انتخابات كاملة (أي يمكن التلاعب بأي خطة انتخابات). قدم تفسيراً لكل من خطط الانتخابات الثلاثة المقدمة في هذا الفصل لكيفية إدلاء الناخبين بأصواتهم (ليس بالضرورة لمرشحهم المفضل) بحيث تظهر النتيجة لصالح أحد المرشحين الذي في العادة ليس مرشحهم الأول. بصورة أدق، كيف يمكن أن يدلي الناخبون بأصواتهم لمرشح لم يكن مرشحهم المفضل في الدورات السابقة للانتخابات لغرض إسقاط بعض

المرشحين الذين يشكلون خطرًا حقيقيًّا على مرشحهم المفضل ؟ لا تقم فقط بتقديم اقتراحات فلسفية لكن قدم مجموعة بيانات واضحة كالتي قدمناها في هذا الكتاب.

(٣٢) اقرأ مقالاً عن كيفية احتساب نقاط الولايات في انتخابات الولايات المتحدة الأمريكية. وبعد استيعاب ذلك، جد أمثلة تبين فيها أن المرشح الذي يفوز باتباع طريقة الأغلبية يمكن ألا يفوز باتباع طريقة احتساب نقاط الولايات.

(٣٣) أنت تسير في جو ماطر. هل الأنسب لك السير بسرعة ثابتة أو الجري بسرعة ثابتة؟ بمعنى إيجاد طريقة الحركة التي تتسبب في سقوط مطر أقل عليك. [إرشاد: إجابتك تعتمد على اتجاه سقوط المطر، هل هو عموديًّا أم بزاوية ؟].

(٣٤) بدأ تساقط الثلج في فترة ما قبل الظهر. كان تساقط الثلج منتظمًا عند قياس معدل تغير ارتفاعه عن الأرض. في الساعة الثانية عشر ظهرًا بدأت شاحنة تنظيف الثلج بالعمل بمعدل ثابت (بدلالة عدد الأقدام المكعبة من الثلج التي يتم إزاحتها في الساعة). نظفت الشاحنة شارعين في الساعة الأولى وشارعًا واحدًا في الساعة الثانية. في أي وقت بدأ الثلج بالتساقط ؟

(٣٥) قرأت مريم الإعلان التالي لشركة إنتاج إطارات السيارات: ثمن الإطار المكفول 20000 ميل هو 45 دولارًا وثمن الإطار المكفول 30000 ميل هو 60 دولارًا وثمن الإطار المكفول 40000 ميل هو 75 دولارًا. لاحظت مريم أن بإمكان الشركة (إذا رغبت في ذلك) من إنتاج نوع واحد فقط من الإطارات تكلفة إنتاجه n ميل ويباع بثلاث أسعار مختلفة. إذا فرضنا أن أعداد الإطارات التي تباع من كل نوع من الأنواع الثلاثة متساوية فما قيمة n التي تحقق أكبر ربح لهذه الشركة ؟

(٣٦) فطيرة مكونة من شريحة من الخبز الأبيض وشريحة من الخبز البر وشريحة من الجبن. شكل كل من هذه الشرائح غير منتظم. هل يمكن استخدام سكين

مستو لإحداث قطع مستقيم واحد ينصف القطع الثلاث؟ (ينصف يعني يقطع إلى جزأين متساويي الحجم). [إرشاد: حاول حلّ المسألة في البداية لشريحة خبز وشريحة جبن].

(٣٧) وضع بول [PAUL1] نموذجًا إحصائيًّا يرجح الارتباط التالي: إذا قابلت شخصًا في أحد المقاهي مصابًا بمرض كورونا ومصافحته بحرارة فإنك على الأرجح ستلاقي حتفك أثناء قيادتك السيارة في طريقك إلى البيت أكثر من أن تلاقي حتفك من الإصابة بمرض كورونا.

جرد هذا الادعاء من العواطف وصمم نموذجًا إحصائيًّا خاص بك. هل تتفق مع نتيجة بول؟ وضع رينز [REN] نموذجًا نتيجته تتناقض مع نتيجة بول. بعد أن تقدم تحليلك الخاص ارجع إلى تعليقات رينز وحاول تقييمها.

(٣٨) تلعب لعبة "بلاك جاك" في نوادي القمار على النحو التالي: لا يلعب اللاعب ضد اللاعبين الآخرين، لكنه يلعب ضد موزع الورق وهو موظف في النادي. تستخدم في هذه اللعبة مجموعة ورق لعب اعتيادية مكونة من 52 ورقة. النقاط التي تحصل عليها تساوي الأعداد على أوراق اللعب، فمثلاً، إذا كانت لديك ورقة الثلاثة (من أي نوع) فيحسب لك ثلاث نقاط. يحسب 10 نقاط لكل من الشاب أو الملكة أو الملك وتحسب 11 نقطة لورقة الأس (أحيانًا تحسب ورقة الأس نقطة واحدة).

تبدأ اللعبة بأن يدفع اللاعب المبلغ الذي سيراهن عليه. يقوم الموزع بتوزيع ورقتين لكل من اللاعبين وورقتين له شخصيًا، الورقة الأولى مقلوبة والورقة الثانية مكشوفة (في بعض الألعاب تكون الورقة المكشوفة هي فقط ورقة الموزع أما ورقتي اللاعبين فمقلوبتين). يقوم الموزع الآن بتوزيع ورقة إضافية لكل من اللاعبين إلى أن يقرر اللاعب أنه لا يريد المزيد من الأوراق. أثناء توزيع الأوراق على اللاعب يقوم اللاعب بإيجاد مجموع نقاط أوراقه. الهدف هو الحصول

على مجموع قريب من 21 ولكن لا يزيد على 21. إذا كان مجموع أوراق اللاعب أكبر من 21 فإنه يخسر رهانه.

بعد أن يقوم الموزع بتوزيع أوراق على اللاعبين يوزع أوراق على نفسه. يتوقف عند نقطة ما لأنه لا يريد أن يتجاوز مجموع أكبر من 21. الآن، تتم مقارنة مجموع نقاط اللاعب مع مجموع نقاط الموزع، الرابح هو صاحب المجموع الأكبر بحيث لا يتجاوز 21. إذا كسب اللاعب يتم دفع مبلغ له يساوي المبلغ الذي راهن عليه وإذا تساوي المجموعان فيكون هناك تعادل ويعيد الموزع للاعب المبلغ الذي راهن عليه فقط.

قاعدة "بلاك جاك" هي: إذا حصلت على ورقة الأس مع أي من الأوراق 10 أو شاب أو ملكة أو ملك فإنك تكون قد حصلت على "بلاك جاك"، وهذا يعني مجموع نقاط تساوي 21 ، وهذا المجموع يفوز على أي مجموع 21 آخر. في هذه الحالة تكسب 1.5 مثلاً للمبلغ الذي راهنت عليه ما لم يكون الموزع قد حصل على "بلاك جاك" آخر. وفي هذه الحالة يسمى الوضع "دفع" ويدفع للاعب فقط مبلغًا مساويًا للمبلغ الذي راهن عليه.

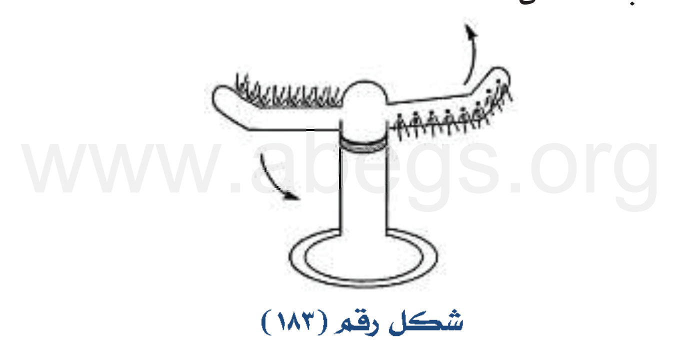
الآن، بما أن الموزع هو موظف في النادي فإنه يتبع قواعد صارمة: إذا كان مجموع نقاطه لا يزيد على 16 فإنه يوزع لنفسه ورقة أخرى "ضربة" أما إذا كان مجموع نقاطه على الأقل 17 فإنه يكتفي بهذا المجموع "وقفة". ولا يسمح له بتغيير هذه القواعد. ومن الطبيعي أن يعتمد قرار اللاعبين الآخرين على العاطفة أو عد الأوراق أو أرقام الحظ وهكذا. ولكن قاعدة الموزع واضحة وبسيطة. على ماذا اعتمدت قاعدة النادي؟ ولماذا المجموع 16 يعتبر مجموعًا مناسبًا؟

(٣٩) في أماكن متفرقة في شوارع أي مدينة توجد عادة فتحات دائرية بغطاء دائري من الصلب يسمى منهل (manhole). تستخدم هذه الفتحات للوصول إلى

خطوط المجاري أو الغاز أو غيرها من الخدمات. ما السبب وراء الشكل الدائري للمنهل؟ هل يوجد شكل آخر يعمل بالكفاءة نفسها؟

(٤٠) أنت تقود سيارتك على الدائري الشرقي لمدينة الرياض متجهًا من الشرق إلى الغرب. وعند تقاطع الدائري مع طريق الملك فهد (وهو طريق رئيس في مدينة الرياض يسير شمالاً وجنوبًا) تريد الاتجاه إلى الشمال. هناك مخرجان منفصلان لهذا التقاطع، أحدهما يوصلك بطريق الملك فهد شمالاً والآخر يوصلك بطريق الملك فهد جنوبًا. أي المخرجين يأتي أولاً؟ ولماذا؟

(أ) [فنمان- Feynman] الشكل رقم (١٨٣) يبين رشاش ماء يستخدم لغرض ري عشب الحدائق.



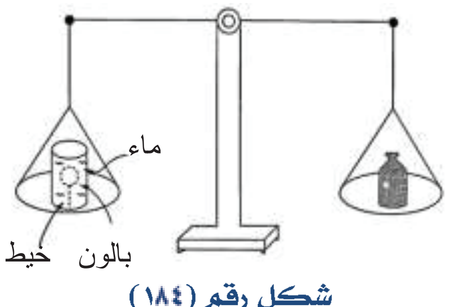
شكل رقم (١٨٣)

لاحظ أنه مكون من ذراعين يدوران حول قاعدة تثبتهما. عندما دخول الماء من الخرطوم يندفع في خطوط رفيعة من ثقوب في الذراعين. استنادًا إلى قانون نيوتن الثاني يبدأ الذراع بالدوران.

تخيل الآن أننا وضعنا هذا الرشاش المثبت بخرطوم في قاع حوض سباحة مملوء بالماء. يتم ضخ الماء من الحوض خلال الخرطوم بمعدل ثابت. في اللحظة التي تبدأ فيها عملية الضخ، في أي اتجاه سيكون دوران الرشاش؟

(٤١) وضعنا علبة مملوءة بالماء وموجود داخلها بالون صغير معبأ بالهواء على إحدى كفتي ميزان. العلبة مقفلة تمامًا. البالون مثبت أسفل العلبة بواسطة خيط.

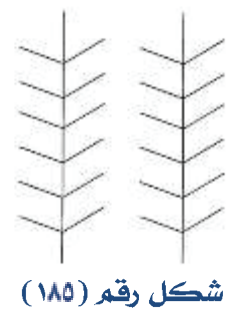
وضعنا وزنًا على الكفة الأخرى للميزان بحيث يكون النظام في وضع توازن كما هو مبين في الشكل رقم (١٨٤).



شكل رقم (١٨٤)

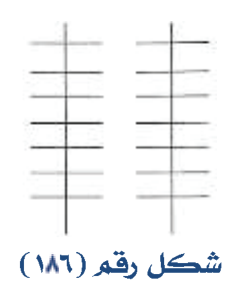
في لحظة معينة انقطع الخيط الذي يثبت البالون. [بما أن الهواء أخف من الماء فإن البالون سيرتفع إلى أعلى العلبة]. في هذه اللحظة هل ترتفع كفة الميزان الموضوع عليها العلبة أم تنخفض؟

(٤٢) يتم تصميم العديد من مصفات السيارات بحيث يسمح باصطفاف السيارات قطريًا، كما هو مبين في الشكل رقم (١٨٥). ما السبب وراء ذلك؟



شكل رقم (١٨٥)

إذا كانت زاوية اصطفاف السيارة هي 30° فما عدد السيارات الإضافية التي يمكن أن يتسع لها المصف عن العدد الذي يكون فيه اصطفاف السيارات بشكل مستطيل كما هو مبين في الشكل الرقم (١٨٦)



شكل رقم (١٨٦)

هل الزوايا الصغيرة تؤدي إلى عرقلة خروج السيارات ودخولها؟ صمم نموذجاً لهذه المسألة وناقشه مع آخرين.

(٤٣) يتغلب المواليد الذكور من سلالة العدنان على المواليد الإناث بشكل غير عادي. في الحقيقة ولد في العام 1959 المولود الذكر السابع والأربعون على التوالي. تمتد هذه المواليد لسبعة أجيال من العائلة. على فرض أن فرص ولادة الذكور والإناث متساوية، ما احتمال وقوع هذا الحدث؟ هذه المسألة مأخوذة من [HUF2].

(٤٤) إذا كان لدينا عدد كاف من القردة تعمل على عدد كاف من الآلات الطابعة لعدد كاف من السنوات فسيكون باستطاعة أحدها أن يطبع مسرحية هاملت (Hamlet). وإذا فرضنا لغرض السهولة أن عدد كلمات هاملت هو 100000 كلمة وأن متوسط عدد حروف الكلمات هو 5 حروف فكم عدد القردة وعدد السنوات اللازمة لإنجاز ذلك باحتمال أكبر من 0.5؟

(٤٥) نفذ التجربة التالية: ضع حافة قطعة نقود معدنية على أحد أصابع يدك فوق طاولة مسطحة. أسقط قطعة النقود بيدك الأخرى بطريقة تجعلها تدور بسرعة. بعد توقف قطعة النقود سجل المخرج "صورة أو كتابة". أعد التجربة 50 مرة. ما عدد ترددات وقوع "صورة"؟

الآن، حاول موازنة قطعة النقود بحيث تكون حافتها على الطاولة مباشرة. اضرب بكفة يدك مكاناً آخر من الطاولة بحيث تقع قطعة النقود على الطاولة. سجل

المخرج "صورة أو كتابة". أعد التجربة 50 مرة. ما عدد ترددات وقوع "صورة"؟ ستكون الإجابة مختلفة تماماً. فسر ذلك.

(٤٦) يوضع على الإطار الخلفي الأيمن للسيارات الواقفة في الأماكن الممنوع الوقوف فيها "كماشة" تجعل السيارة غير قابلة للقيادة. صمم كماشة مناسبة لها الخصائص التالية:

١. يستطيع شرطي مرور واحد وضعها على السيارة بسهولة من دون الحاجة لرفع السيارة.

٢. لا تتسبب في تعطيل حركة المرور.

٣. لا يستطيع صاحب السيارة فكها.

٤. لا يستطيع صاحب السيارة من قيادة سيارته إلا بعد فكّها.

يتطلب الحل رسم ووصف الكماشة وإرشادات لاستخدامها.

(٤٧) دخل جورج إلى بقالة صغيرة لشراء بعض الحاجيات. اختار بعض حبات الحلوى وقطعة شوكولاتة ورقائق البطاطا ومشروب غازي. وبما أن جورج جيد في الحساب، قام بجمع ثمن الحاجات الأربعة وأخرج من محفظته قطعة نقود من فئة العشرة دولارات واتجه لدفع ثمن ما اشتراه.

أخبر عامل البقالة جورج بأن ماكينة الحساب معطلة، لذا فهو يستخدم آلة حاسبة. لاحظ جورج أن العامل غير أمين حيث يقوم بوضع ثمن السلعة على الآلة الحاسبة ويضغط مفتاح الضرب عوضاً عن الضغط على مفتاح الجمع. كانت المفاجأة الحقيقية لجورج بأن العامل أخبره أن مجموع المشتريات يساوي 7.11 دولارات، وهو المجموع الذي وجده جورج بالجمع بدل الضرب. ما ثمن كل سلعة من الأربع سلع؟

(٤٨) وعد حسام بأن حبّه لزوجته سيستمر إلى أن تتمكن شلالات نياغرا من نحت المنحدر الصخري تحتها وإذابته في البحيرة. صمم نموذجاً نظرياً لتحديد مدة حبّ حسام لزوجته.

(٤٩) سيتقدم جمال وسامي لاختبار فيزياء يوم الأربعاء. ولكنهما كانا مدعوين إلى حفلة في المدينة المجاورة مساء الثلاثاء ولم يتمكنا من الوصول إلى مكان الاختبار في الوقت المحدد. حاولا استعطاف أستاذ المادة بادعائهم أن سبب تأخرهما عن الاختبار هو اكتشافهم بنشر في أحد إطارات السيارة. وافق أستاذ المادة على منحهم اختبار بديل. كتب أسئلة اختبار واحدة لكليهما، لكنه وضع كل منهما في غرفة منفصلة. يتكون الاختبار البديل من سؤالين:
السؤال الأول عليه 5 درجات وهو سؤال بسيط عن سقوط الأجسام. أما السؤال الثاني فعليه 95 درجة ويسأل عن موقع الإطار الذي بنشر في سيارتهما. لم يتفق جمال وسامي سابقًا على موقع الإطار. ما احتمال (على فرض أن إطارات السيارة يساوي 4) أن يجيبا نفس الإجابة ؟

(٥٠) درجة حرارة غرفة جيدة العزل هي 72° . تم إقفال جهاز التحكم بالحرارة (الثرموستات) ووضعت ثلاجة في الغرفة وتم تشغيلها. ووضع مؤشر التحكم في البرودة داخل الثلاجة على "الأكثر برودة" وترك باب الثلاجة مفتوحًا. درجة حرارة الثلاجة هي الوحيدة التي تؤثر في درجة حرارة الغرفة. بعد مرور ساعة هل تصبح درجة حرارة الغرفة أكبر أم أصغر من درجة حرارتها الأصلية وهي 72° ؟

(٥١) اشتركت ثلاث سيدات في غرفة فندق. أخبرهم موظف حجوزات الغرف أن أجرة الغرفة هي 75 دولارًا. بعد فترة وجيزة تذكر موظف الحجز أنه أخطأ في الحساب حيث إن الأجرة هي 70 دولارًا. أعطى العامل 5 دولارات ليعيدها إلى السيدات الثلاث. بما أن العدد 5 لا يقبل القسمة على 3 فإن السيدات قررن أن يعيد العامل 1 دولار لكل منهن ويأخذ هو دولارين.
أثناء مغادرة العامل الغرفة بدأ بتحليل المسألة: كل سيدة دفعت $25 - 1 = 24$ دولارًا وأخذ هو 2 دولارين. إن ذلك يجعل المبلغ المدفوع يساوي $3 \times 24 + 2 = 74$. أين اختفى الدولار الباقي؟

قائمة المراجع
Bibliography

[MPI] D. Albers and J. Alexanderson, *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Birkhauser, Cambridge, 1985.

[BAL] W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, 13th ed., Dover, New York, 1987.

[BER] E. R. Berlekamp, *et al, Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Academic Press, New York, 1982.

[CRC] S. Krantz, K. Rosen, and D. Zwillinger, eds., *Standard Mathematical Tables*, 30th ed., CRC Press, Boca Raton, 1996.

[BHS] G. Blom, L. Holst, D. Sandell, *Problems and Snapshots from the World of Probability*, Springer Verlag, Berlin, 1994.

[CUN] F. Cunningham, The Kakeya problem for simply connected and star-shaped sets, *Am. Math. Monthly* 78(1971), 114-129.

[DOR] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, Dover Publishing, New York, 1965.

[ERD] P. Erdös, On the fundamental problem of mathematics, *Am. Math. Monthly* 79(1972), 149-150.

[GAR] M. Gardner, ed., *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover, New York, 1959.

[GOF] C. Goffman, And what is your Erdos number?, *Am. Math. Monthly* 76(1969), 791.

[HAL] P. Halmos, *Problems for Mathematicians Young and Old*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1991.

[HUF1] D. Huff, *How to Lie with Statistics*, 34th Norton & Co., New York, 1954. Edition, W. W.

[HUF2] D. Huff, *How to Take a Chance*, W. W. Norton & Co., New York, 1959.

[JEA] J. Jeans, *An Introduction to the Kinetic Theory of Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1942.

[KLW] V. Klee and S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Associ-ation of America, Washington, D.C., 1991.

[KRAl] S. Krantz, *The Elements of Advanced Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[KRA2] S. Krantz, *Real Analysis and Foundations*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[LAK] Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[LAR] L. Larsen, *Problem Solving through Problems*, Springer Ver-lag, Berlin, 1983.

[LIT] J. E. Littlewood, *A Mathematician's Miscellany*, Methuen, London, 1953.

[GUI] P. Matthews, *The Guinness Book of World's Records*, Ban-tam Books, New York, 1994.

[MOO] David S. Moore, *Statistics: Concepts and Controversies*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1979.

[MON] O. Morgenstern and J. von Neumann, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Prince-ton, 1946.

[PAULI] J. A. Paulos, *Innumeracy*, Hill and Wang, New York, 1988.

[PAUL2] J. A. Paulos, *Beyond Innumeracy*, Vintage, New York, 1992.

[POLl] G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton, 1988.

[POL2] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, in two vol-nInes, Princeton University Press, Princeton, 1954.

[POK] G. Polya and J. Kilpatrick, *The Stanford Mathematics Problem Book*, Teachers College Press, New York, 1974.

[REN] P. Renz, Thoughts on *Innumeracy*: Mathematics Versus the World, Am. Math. Monthly 1993, 732-742.

[RIN] G. Ringel, *Map Color Theorem*, Springer Verlag, 1974.

[SCHO] A. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, New York 1985.

[SH] J. R. Shoenfeld, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Read-ing, 1967.

[SIMI] W. Simon *Mathematical Magic*, Charles Scribner's Sons, New York, 1964.

[SIM2] W. Simon, *Mathematical Magic*, Dover Books, New York, 1993.

[STR] S. Straszewicz, *Mathematical Problems and Puzzles from the Polish Mathematical Olympiads*, Pergamon Press, Oxford, 1965.

[SUP] P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, Dover Publications, New York, 1972.

[TIE] J. Tierney, Paul Erdos is in town. His brain is open, Science 84 5(1984), 40-47.

كشاف الموضوعات
Subject Index

أولاً: عربي - إنجليزي

أ

ب

ثانياً: إنجليزي - عربي

حلول المسائل الفردية

تقديم
Preface

يحتوي هذا القسم على حلول معظم المسائل فردية المقدمة في كتاب أساليب حل المسائل لمؤلفه ستيفن ج كرانتز (Steven G. Krantz) حيث نستخدم من الآن فصاعداً كلمة "الكتاب" للدلالة عليه.

من المهم التأكيد على استخدام هذا القسم كمرجع وعدم استخدامه كوسيلة لتعلم حلول مسائل الكتاب. ولهذا فإننا نشدد على أهمية عدم قراءة حل أي مسألة قبل المحاولة الجدية لحل هذه المسألة. الزمن الذي يستغرقه الطالب في محاولة حل مسألة سيؤدي حتماً إلى تنمية قدرة الطالب على حل المسائل.

الترميزات والمراجع والنتائج المستخدمة في حل المسائل مأخوذة مباشرة من الكتاب.

نقدم شكرنا وتقديرنا لكل من نيكولا آركوزي (Nicola Arcozzi) وستيفن كرانتز(Steven G. Krantz) وفلاديمير ماسيك (Vladimir Masek) على ملاحظاتهم القيمة على العديد من المسائل.

لويس فيرناند ز وهايده جورانسا راب
سانت لويس ١٥/٥/١٩٩٦م

الفصل الأول

مفاهيم أساسية
Basic Concepts

(١.١)

نستخدم الاستقراء الرياضي. سنبرهن أولاً نتيجة أعم:

$$\sqrt{2}-1\ ^{k} = \sqrt{N_k} - \sqrt{N_k - 1}$$

لكل عدد صحيح موجب N_k يحقق:

$$\sqrt{2}\sqrt{N_k}\sqrt{N_k - 1} \in \mathbb{Z} \ .$$

افترضنا الشرط الأخير لأنه يساعدنا على استكمال البرهان بالاستقراء.

العبارة صائبة عند $k = 1$ لأنه بوضع $N_1 = 2$ نجد أن:

$\sqrt{2}-1 = \sqrt{2} - \sqrt{2-1}$ وأن $\sqrt{2}\sqrt{1}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Z}$.

نفرض الآن أن العبارة صائبة عند $k = n$. هدفنا هو إيجاد عدد N_{n+1} يحقق

$\sqrt{2}-1\ ^{n+1} = \sqrt{N_{n+1}} - \sqrt{N_{n+1} - 1}$ و $\sqrt{2}\sqrt{N_{n+1}}\sqrt{N_{n+1} - 1} \in \mathbb{Z}$.

باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}-1\ ^{n+1} &= \sqrt{2}-1\ ^{n}\ \sqrt{2}-1 \\
&= \sqrt{N_n} - \sqrt{N_n - 1}\quad \sqrt{2}-1 \\
&= \sqrt{N_n}\sqrt{2} + \sqrt{N_n - 1}\ -\ \sqrt{2}\sqrt{N_n - 1} + \sqrt{N_n}
\end{aligned}$$

الآن، لاحظ أن:

$$\left(\sqrt{N_n}\sqrt{2}+\sqrt{N_n-1}\right)^2 = 2N_n + (N_n-1) + 2\sqrt{2}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-1}$$
$$= 3N_n - 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-1} \in \mathbb{Z}$$

لنفرض أن K هو العدد $3N_n - 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-1}$.

عندئذ،

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{N_n-1}+\sqrt{N_n}\right)^2 = 2(N_n-1) + N_n + 2\sqrt{2}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-1}$$
$$= 3N_n - 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-1}$$
$$= K - 1 \in \mathbb{Z}$$

وبهذا يكون:

$$\sqrt{K}-\sqrt{K-1} = \left(\sqrt{2}\sqrt{N_n}+\sqrt{N_n-1}\right) - \left(\sqrt{2}\sqrt{N_n-1}+\sqrt{N_n}\right)$$
$$= \left(\sqrt{2}-1\right)^{n+1}$$

و

$$\sqrt{K}\sqrt{K-1}\sqrt{2} = \left(\sqrt{N_n}\sqrt{2}+\sqrt{N_n-1}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{N_n-1}+\sqrt{N_n}\right)\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-1}\sqrt{2} + 2N_n + 2\left(N_n-1\right) \in \mathbb{Z},$$

لأن $\sqrt{2}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-1} \in \mathbb{Z}$ وذلك باستخدام فرضية الاستقراء. إذن، K يحقق الشروط المطلوبة للعدد N_{n+1}. وبهذا إذا وضعنا $N_{n+1} = K$ نكون قد انتهينا.

(١,٣)

سنجد صيغة مغلقة لمجموع k من مربعات الأعداد الصحيحة. نستخدم الأسلوب نفسه الذي اتبعناه في مسألة (٢,١,١) من الكتاب. لاحظ أولاً أن:

$$\ell^3-(\ell-1)^3 = \ell^3-\ell^3+3\ell^2-3\ell+1 = 3\ell^2-3\ell+1$$

بالجمع من $\ell=1$ إلى $\ell=k$ نحصل على المجموع المتناوب في الطرف الأيسر حيث تختصر معظم الحدود:

$$k^3-(k-1)^3 \;+\; (k-1)^3-(k-2)^3 \;+\cdots+(2^3-1)+(1-0)$$
$$=\; 3k^2-3k+1 \;+\; 3(k-1)^2-3(k-1)+1 \;+\cdots+(3-3+1)$$

بالتبسيط وإعادة ترتيب الحدود وتطبيق صيغة مجموع أول k من الأعداد الصحيحة نحصل على:

$$k^3=3\;k^2+(k-1)^2+\cdots+1$$
$$-3\;k+(k-1)+\cdots+1 \;+\; 1+1+\cdots+1$$
$$=3\;k^2+(k-1)^2+\cdots+1\;-3\frac{k(k+1)}{2}+k$$
$$=3\;k^2+(k-1)^2+\cdots+1\;-\frac{3k^2+k}{2}$$

وبهذا نحصل على:

$$k^2+(k-1)^2+\cdots+1\;=\frac{2k^3+3k^2+k}{6}$$

للحصول على مجموع المكعبات نستخدم الأسلوب نفسه مرة أخرى. لاحظ أولاً أن:

$$\ell^4-(\ell-1)^4$$
$$=\ell^4-\ell^4+4\ell^3-6\ell^2+4\ell-1=4\ell^3-6\ell^2+4\ell-1$$

بالجمع من $\ell=1$ إلى $\ell=k$ نحصل على المجموع المتناوب في الطرف الأيسر حيث تختصر معظم الحدود:

$$\left[(k^4-(k-1)^4\right]+\left[((k-1)^4-(k-2)^4\right]$$
$$+\cdots+\left[((2^4-1)+(1-0)\right]$$
$$=\left[(4k^3-6k^2+4k-1\right]+\left[(4(k-1)^3-6(k-1)^2\right]$$
$$+\left[(4(k-1)-1\right]+\cdots+(4\times1^3-6\times1^2+4.1-1)$$

بتبسيط وإعادة ترتيب حدود الصيغة السابقة نحصل على:

$$k^4 = 4(1+2^3+\cdots+k^3) - 6(1+2^2+\cdots+k^2) + 4(1+2+\cdots+k) - (k)$$

وبحل المعادلة لإيجاد $1^3+2^3+\cdots+k^3$ نجد أن:

$$1^3+2^3+\cdots+k^3 = \frac{k^4+6(1+2^2+\cdots+k^2)-4(1+2+\cdots+k)+(k)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{k^4+6\frac{2k^3+3k^2+k}{6}-4\frac{k^2+k}{2}+k\right\}$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$ (بعد التبسيط).

(١,٥)

بكتابة المعادلة على الصورة

$$n(m-1) = m$$

نجد أن $m-1$ يقسم m. وهذا صائب فقط عندما يكون $m=2$ أو $m=0$. إذا كان $m=2$ فإن $n(2-1)=2$. أي أن $n=2$. أما إذا كان $m=0$ فإن $n(0-1)=0$. أي أن $n=0$. إذن، يوجد حلان فقط للمعادلة هما $m=n=0$ و $m=n=2$.

(١,٧)

لاحظ أن:

$$2^{300}\times 5^{600}\times 4^{400} = 2^{300}\times 5^{600}\times 2^{800} = 2^{600}\times 5^{600}\times 2^{500} = 10^{600}\times 2^{500}$$

وبهذا نجد أن عدد الأصفار الذي ينتهي بها العدد يساوي 600.

(٩,١)

يوجد بين العددين 1 و 100 تسعة أعداد ذات خانة واحدة و 90 عدداً من ذوي الخانتين وعدداً واحداً ذا ثلاث خانات. إذن، عدد الخانات اللازمة هو:

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 1 \times 3 = 192 .$$

(١١,١)

لنفرض أن عدد خانات العدد N يساوي k. عندئذ، يمكن كتابة N على الصورة $N = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$. أو على الصورة:

$$\begin{aligned} N &= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \\ &= a_k(\underbrace{99\cdots9}_{\text{خانة } k} + 1) + a_{k-1}(\underbrace{99\cdots9}_{\text{خانة } k-1} + 1) + \cdots + a_1(9+1) + a_0 \\ &= [a_k \underbrace{99\cdots9}_{\text{خانة } k} + a_{k-1} \underbrace{99\cdots9}_{\text{خانة } k-1} + \cdots + 9] + [a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0] \end{aligned}$$

بما أن كلاً من العدد N والعدد الأول من الطرف الأيمن يقبل القسمة على العدد 9 فإن العدد $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_0$ يقبل أيضاً القسمة على العدد 9. أيضاً عدد خانات العدد $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$ أقل من عدد خانات N. عند جمع خانات عدد يقبل القسمة على 9 نحصل على عدد يقبل أيضاً القسمة على العدد 9 وعدد خاناته أصغر من عدد خانات العدد الأصلي. وبالاستمرار، سنحصل على عدد مكون من خانة واحدة ويقبل القسمة على العدد 9. هذا العدد يجب أن يكون العدد 9.

(١٣,١)

نستخدم إستراتيجية حل التمرين (٦). اكتب أولاً:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n .$$

ضع k من النقاط عمودياً فوق كل عدد من هذه الأعداد الذي يقبل القسمة على p^k. من الواضح الآن أن عدد قواسم p في $n!$ يساوي عدد هذه النقاط، وبهذا نقوم

بعد هذه النقاط. عدد الأعداد التي تقبل القسمة على العدد p يساوي عدد النقاط السفلية وعدد الأعداد التي تقبل القسمة على العدد p^2 يساوي عدد النقاط في المستوى الثاني وهكذا. وبالاستمرار في العد بهذا الأسلوب نصل في النهاية إلى عدد k بحيث لا يوجد أي عدد في حاصل الضرب يقبل القسمة على p^k (يحصل ذلك عندما يكون $p^k > n$).

إذن، عدد قواسم p في $n!$ يساوي عدد الأعداد بين 1 و n التي تقبل القسمة على p مضافاً إليها عدد الأعداد بين 1 و n التي تقبل القسمة على p^2 وهكذا. الآن، ما عدد الأعداد التي تقبل القسمة على p^k حيث $1 \le k \le n$ ؟ هذه الأعداد هي $1p^k, 2p^k, \cdots, \ell p^k$ حيث ℓ هو أكبر عدد يحقق $\ell p^k \le n$. إذن، عدد الأعداد بين 1 و n والتي تقبل القسمة على p^k هو $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ حيث $[x]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر من x. إن هذا محقق لأن:

$$p^k\left[\frac{n}{p^k}\right] < n \quad \text{و} \quad p^k\left(\left[\frac{n}{p^k}\right]+1\right) > n .$$

إذن، $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ هو أكبر عدد صحيح ℓ حيث $\ell p^k \le n$. وبهذا نجد أن الصيغة النهائية المطلوبة هي $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$ (لاحظ أن $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ عندما يكون k كبيراً).

(١٥,١)

العدد الكلي للمباريات التي يلعبها فريق مع كل فريق آخر مرة واحدة هو:

$$14 + 13 + 12 + \cdots + 2 + 1 = 105$$

ولرؤية ذلك، لاحظ أن عدد المباريات التي يلعبها الفريق الأفضل هو 14 وعدد المباريات التي يلعبها الفريق الأفضل بعد ذلك هو 13 (استثنينا المباراة التي لعبها مع الفريق

الأفضل لأنه سبق حسابها) وهكذا. عدد نقاط كل من المباريات يساوي 4. إذن، عدد النقاط الكلية يساوي $420 = 105 \times 4$. الآن، أعداد نقاط الفرق مختلفة وأصغرها 21. لذا فإن عدد نقاط الفريق الذي يأتي بعد ذلك هو 22. وعدد نقاط الفريق الثالث هو 23 وهكذا نجد أن عدد نقاط الفريق الأفضل هو 35 على الأقل. ولهذا فإن العدد الكلي للنقاط يجب أن يكون أكبر من أو يساوي:

$$21 + 22 + 23 + \ldots + 34 + 35 = 420\,.$$

وبما أن هذا العدد هو بالضبط عدد النقاط الكلية فإن عدد نقاط الفريق الثاني بعد الأصغر هو 22 و الثالث بعد الأصغر هو 23، وهكذا يكون عدد نقاط الفريق الأفضل هو 35. إذن، أكبر عدد من النقاط الذي يمكن لفريق أن يحققه هو $24 = (14$ مباراة$)\times(3$ نقاط$)$.

إذن، خسر الفريق الأفضل 7 نقاط. لاحظ أنه يجب طرح نقطتين لكل خسارة (3 نقاط للرابح ونقطة للخاسر). إذا لم يتعادل الفريق الأفضل في أي مباراة فإن عدد النقاط التي خسرها يجب أن يكون زوجيًا (لا يمكن أن يكون 7). وبهذا فيجب أن يتعادل الفريق الأفضل في أحد المباريات.

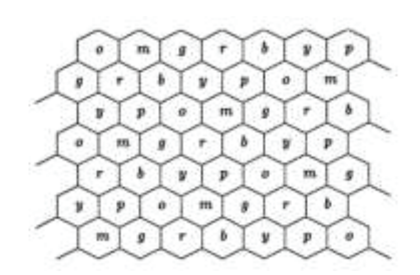
(١٧,١)

العدد الصحيح هو $2 - 2k$.

(١٩,١)

يمكن تلوين المستوى على النحو التالي:

السداسيات منتظمة قطر كل منها 1. كل حرف (ضلع) يمثل لون. نقوم بتلوين الداخل والنصف الأيسر من المحيط لكل سداسي بما في ذلك الرأس العلوي وعدم تلوين الرأس السفلي بلون يقابل الحرف. لاحظ أن المسافة بين سداسيين لهما اللون نفسه أكبر من 1.



(٢١,١)

إذا صرح المحافظ عن عدد الأزواج الذين خانوا زوجاتهم فإن المسألة ستكون واضحة لأن: كل من الزوجات التي على علم بعدد أصغر من الأزواج الذين خانوا عن العدد الذي صرح به المحافظ فإنها ستعلم مباشرة أن زوجها يخونها.

(٢٣,١)

لاحظ أن:

$$\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]+\left[\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right]$$
$$=\left[\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{n+1}{(n+1)!}\right]$$
$$=\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]$$

ولهذا فإن:

$$\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$$
$$=\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]-\left[\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right]$$
$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

(٢٥,١)

احتمال الربح للإستراتيجية الأولى هو:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\text{عدد حالات الربح}}{\text{عدد الحالات الكلي}}$$

لإيجاد احتمال ربح الإستراتيجية الثانية يجب ملاحظة أن احتمال سحب كرة بيضاء في السحبة الثانية يعتمد على لون الكرة المسحوبة في السحبة الأولى. وبهذا لدينا:

$$P(\text{سحب كرة بيضاء في السحبة الثانية})$$

$$= P(\text{الكرة الأولى بيضاء}) \times P(\text{كرة بيضاء في الثانية}|\text{الكرة الأولى بيضاء})$$

$$+ P(\text{الكرة الأولى سوداء}) \times P(\text{كرة بيضاء في الثانية}|\text{الكرة الأولى سوداء})$$

$$= \frac{a-1}{a+b-2} \times \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b-2} \times \frac{b}{a+b}$$

$$= \frac{a^2 - a + ab}{(a+b)(a+b-2)}$$

$$= \frac{a(a+b-2)+a}{(a+b)(a+b-2)}$$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{a}{(a+b)(a+b-2)}$$

هذه النتيجة مماثلة لمسألة مونتي هول:

يقوم اللاعب B يحذف إحدى الكرات السوداء كما هو الحال عند حذف مونتي هول أحد الأبواب في المسابقة.

(٢٧,١)

يمكن تغطية أرض الغرفة في جميع الحالات وهذه مسألة ليست صعبة. إذا قطعنا ركنين متجاورين، عندئذ نقوم بتغطية أرض الغرفة بوضع البلاطات موازية

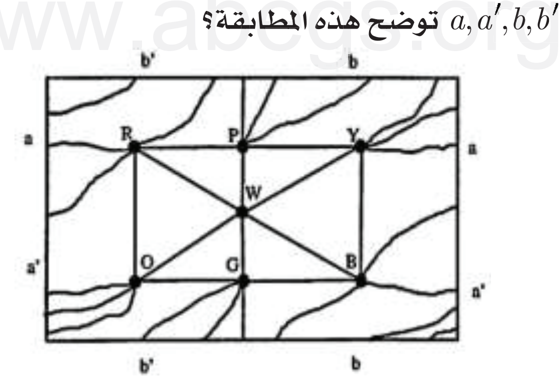
للضلع المفقود منه ركنين. وإذا كان الركنان المفقودان متجاوران فنضع البلاطات بحيث تكون موازية لهذين الركنين المتجاورين. وبعد ذلك يتم تغطية بقية الأرضية بأسلوب مباشر.

نظـرة أعمق على الهندسة
A Deeper Look at Geometry

(١,٢)

(أ) على سبيل المثال، يمكن تلوين الرسم التام ذي الرؤوس الأربعة على الكرة باستخدام أربعة ألوان.

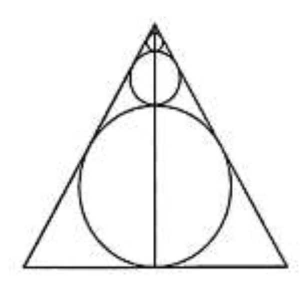
(ب) الرسم التام ذو 7 رؤوس على الطارة يحتاج إلى 7 ألوان كما هو مبين في الشكل المرفق. يمكن اعتبار الطارة مستطيلاً بمطابقة الحافة العليا مع الحافة السفلى. الحافة اليسرى مع الحافة اليمنى. الحروف a, a', b, b' توضح هذه المطابقة؟



(ج) العدد اللوني لطارة بثقبين يساوي 8 .

(٢,٢)

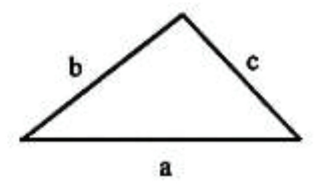
لنفرض أن المثلث مرتكز على أحد أضلاعه كما هو مبين في الشكل التالي:



إذا رسمنا عمودًا من قاعدة المثلث إلى الرأس العلوي فإن طول هذا العمود يساوي مجموع أقطار جميع دوائر الشكل. بما أن ارتفاع المثلث يساوي 3 فإن مجموع أقطار الدوائر يساوي 3 . أي أن مجموع أنصاف أقطارها يساوي 1.5 . الآن، بإجراء العملية على كل من الرؤوس نجد أن مجموع أنصاف أقطار الدوائر التي نحصل عليها هو $3 \times 1.5 - 2 = 2.5$. طرحنا العدد 2 لأنه تمَّ حساب نصف قطر دائرة المركز (وهو 1) ثلاث مرات. إذن، الإجابة هي 2.5 .

(٥.٢)

لنفرض أن المثلث مرتكز على ضلعه الأكبر وليكن a ولنفرض أن طول الضلعين الأيسر والأيمن هما b و c على التوالي كما هو مبين في الشكل:



لاحظ أن $a = n$. إذا كان $b = k$ حيث $1 \leq k \leq n$ فإن طول c يمكن أن يأخذ أحد الأعداد $(n-k+1),(n-k+2),\ldots,n$ (لاحظ أن $a < b + c$ لأي مثلث). الآن، إذا كان $b = k$ فإن عدد الخيارات لأطوال الضلع c يساوي k . إذن، عدد المثلثات هو :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

لاحظ أن المثلثات متساوية الساقين التي يكون فيها طول كل من الساقين يساوي n هي مثلثات متطابقة، ولهذا فإنه قد تمَّ عدّها مرتين (بالتحديد عندما يكون $a=b=n$ ، $c=k<n$ و $a=c=n$ ، $b=k<n$). عدد هذه المثلثات يساوي $n-1$. ولذا فإن عدد المثلثات غير المتطابقة هو:

$$\frac{n(n+1)}{2}-(n-1)=\frac{n^2-n+2}{2}.$$

(٢,٧)

لإيجاد الجزء من المستوى المغطى بطريقة المربعات نقوم بقسمة مساحة الدائرة الداخلية (قطرها 1) على مساحة المربع الذي طول ضلعه 1 الذي يحيط الدائرة لنجد أن ذلك يساوي $\frac{\pi}{4}$. أما في حالة السداسيات، نقوم بقسمة مساحة الدائرة الداخلية (نصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}$) على مساحة السداسي الذي يحيطها لنجد أن ذلك يساوي $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. ولهذا، فإن التغطية باستخدام السداسيات أكثر فاعلية.

(٢,٩)

بضم مثلثين متطابقين نحصل على متوازي أضلاع. يمكن تغطية المستوى بمتوازيات أضلاع (انظر الشكل رقم 3 في الكتاب). لذا فالإجابة "نعم".

(٢,١١)

خطأ: قطر المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه d يساوي d، لكن لا يمكن رسمه داخل دائرة قطرها d لأن المسافة من مركز المثلث إلى أي من أضلاعه

تساوي $\frac{d}{\sqrt{3}}$. وهي أكبر من نصف قطر الدائرة.

(١٣،٢)

يمكن تعريف المجموعة المحدبة على النحو التالي: تكون المجموعة محدبة إذا كان:

$$pt + q(1-t) \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

عنصر في المجموعة لكل عنصرين p و q في المجموعة. لنفرض أن $p, q \in X + Y$ وأن $0 \leq t \leq 1$. المطلوب إثبات أن $pt + q(1-t) \in X + Y$. من تعريف $X + Y$ نجد أن:

$$p = p_X + p_Y \text{ و } q = q_X + q_Y \text{ حيث } p_X, q_X \in X \text{ و } p_Y, q_Y \in Y .$$

بما أن كل من X و Y مجموعة محدبة فإن:

$$p_X t + q_X(1-t) \in X$$
$$p_Y t + q_Y(1-t) \in Y$$

إذن،

$$\begin{aligned} pt + q(1-t) &= (p_X + p_Y)t + (q_X + q_Y)(1-t) \\ &= (p_X t + q_X(1-t)) + (p_Y t + q_Y(1-t)) \in X + Y \end{aligned}$$

وبهذا فإن $X + Y$ مجموعة محدبة.

يمكن استخدام متباينة المثلث لإثبات أن القطر هو على الأقل $d\sqrt{2}$ وعلى الأكثر $2d$. ويمكن تحقيق هذين الحدين. على سبيل المثال، قطر مجموع قرصين قطر كل منهما 1 يساوي 2 . ومن ناحية أخرى، إذا أخذنا قطعتين مستقيمتين متعامدتين طول كل منهما d فإن مجموعهما سيكون مربعاً طول ضلعه d وقطره $d\sqrt{2}$.

أما بالنسبة إلى العرض فلا يمكن استنتاج أي شيء ملموس. على سبيل

المثال، إذا كانت X مستقيمًا أفقيًّا غير منته قطرها d وكانت Y مستقيمًا رأسيًّا غير منته قطرها d فإن $X+Y$ سيكون المستوى حيث قطره غير منته.

(٢٫١٥)

مساحة $2S$ ستكون 4 أضعاف مساحة S لأنها تضرب بالعدد $2^2 = 4$.

لرؤية ذلك، لاحظ أولاً أنه عند ضرب ضلع مربع بالعدد 2 فإن مساحته ستكون 4 أضعاف المساحة الأصلية. وبما أن المربعات هي اللبنات الأساسية لقياس المساحة (أي، لإيجاد مساحة مجموعة نقوم بتغطيتها بمربعات صغيرة ومن ثم نجد مجموع مساحات هذه المربعات) فإن مساحة $2S$ ستكون أربعة أمثال مساحة S.

لاحظ أن الوضع الأصلي للمجموعة لا يؤثر في النتيجة. إذا كانت المجموعة الأصلية بعيدة مسافة d عن الأصل فعند الضرب بالعدد 2 تصبح مسافتها تبعد عن الأصل $2d$.

(٢٫١٧)

تكون المجموعة الجزئية من المستقيم محدبة إذا وفقط إذا احتوت جميع النقاط الواقعة بين أي نقطتين. أي أن المجموعة المحدبة هي مجموعة مترابطة. وبهذا فإن مجموع مجموعتين مترابطتين هو مجموعة مترابطة (نعني بمترابطة هنا عدم وجود ثقوب). القطر والعرض هما نفسهما للمجموعات الجزئية من المستقيم. للمجموعات الجزئية من المستقيم يكون قطر المجموع هو مجموع القطرين.

(٢٫١٩)

لنفرض أن α هي الزاوية الكبرى وأن β هي الزاوية الصغرى. عندئذ،

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{، } \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\text{، } \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}\text{، } \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$= \frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{2}{5\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \sin 45^\circ$$

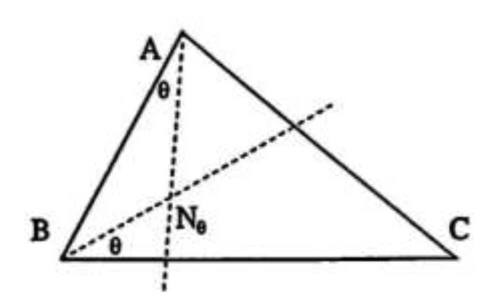
إذن، $\alpha + \beta = 45^\circ$.

(٢,٢١)

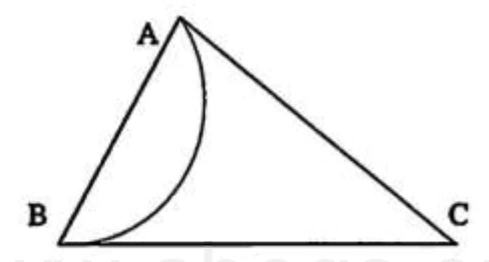
يمكن أن نفرض أن رؤوس المثلث تقع على محيط المضلع. محيط المضلع يساوي مجموع محيطات الأجزاء الناتجة التي تصل بين كل رأسين من رؤوس المثلث. طول كل من هذه الأجزاء أكبر من طول ضلع المثلث المقابل له. ولهذا فمجموع أطوال هذه الأجزاء أكبر من مجموع أطوال أضلاع المثلث (محيط المثلث).

(٢,٢٣)

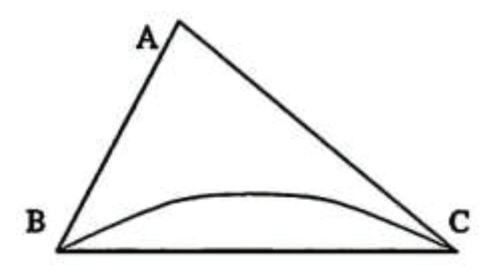
لنفرض أن رؤوس المثلث هي A، B، C. سنجد مجموعة النقاط N التي تحقق $NAB = NBC$. نفرض أن N_θ هي النقطة التي تحقق $N_\theta AB = N_\theta BC = \theta$ حيث θ زاوية معطاة. لإيجاد هذه النقطة، نرسم مستقيمًا يقطع A ويصنع زاوية θ مع AB ومستقيمًا يقطع B ويصنع زاوية θ مع BC. هذان المستقيمان غير متوازيين (إذا كانا متوازيين فإنه من السهل أن نرى أن $ABC = 180^\circ$). النقطة N_θ هي نقطة تقاطع هذين المستقيمين (لاحظ أن N_θ تقع على المستقيم الأول حيث $N_\theta AB = \theta$ وأن N_θ تقع على المستقيم الثاني حيث $N_\theta BC = \theta$). الشكل أدناه يوضح ذلك:



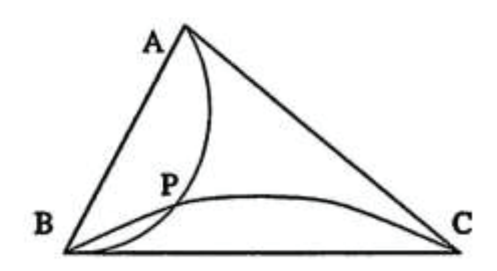
وبتغيير قيم θ نجد أن N_θ ترسم لنا قوسًا محدبًا كما هو مبين في الشكل:



بالمثل، مجموعة النقاط M التي تحقق $MBC = MCA$ ترسم قوسًا مقعرًا كما هو مبين في الشكل أدناه:



القوس الأول يمس BC والقوس الثاني يصل بين B و C. بما أن القوس الأول ينتهي عند A والثاني ينتهي عند C فإن القوسين يتقاطعان عند نقطة P كما هو مبين في الشكل التالي:



بما أن P تقع على القوس الأول فإن $PAB = PBC$ ، وبما أنها تقع على القوس الثاني فإن $PBC = PCA$. إذن،

$$PAB = PBC = PCA.$$

(٢.٢٥)

يمكن استخدام هندسة الإحداثيات لحلّ هذا التمرين: ارسم إحداثيين واكتب المعلومات على هذين الإحداثيين. طريقة جيدة لإنجاز ذلك هي: افرض أن p, q, r أضلاع المثلث وأن a, b, c المسافات من P إلى الأضلاع p, q, r على التوالي. لنفرض أن r هي قاعدة المثلث وأن h ارتفاعه.

ارسم مستقيماً يمرُّ بالنقطة P موازياً للضلع p . سنحصل على مثلث أصغر T_1 ارتفاعه $h-a$. ارسم الآن مستقيماً يمرُّ بالنقطة P موازياً للضلع q . عندئذ، نحصل على مثلث أصغر T_2 يقع داخل T_1 وارتفاعه $h-a-b$. أيضاً، رأس T_2 الأعلى هو P وقاعدته r (وهي c). إذن، $h-a-b=c$ وبهذا نحصل على المطلوب.

(٢.٢٧)

نفرض أن m هو الوتر. عندئذ،

$m^2 = \ell^2 + 100$ أو $m^2 - \ell^2 = (m-\ell)(m-\ell) = 100$.

ضع $a = m + \ell$ و $m - \ell = b$. عندئذ، كل من a و b يقسم 100 وحاصل

ضربهما يساوي 100 . أيضًا، $m = \frac{a+b}{2}$ و $\ell = \frac{a-b}{2}$. وبما أن m و ℓ عددان صحيحان فإنه إما أن a و b زوجيان معًا أو أنهما فرديان معًا. بتجريب جميع قواسم العدد 100 نجد أن $a = b = 10$ أو $a = 50$ و $b = 2$. إذا كان $a = b = 10$ فإن $m = 10$ و $\ell = 0$ وهذا مستحيل. إذن، $a = 50$ و $b = 2$. وبهذا فإن $m = 26$ و $\ell = 24$.

(٢٩,٢)

نفرض أن أحد محوري التناظر أفقيًّا. وليكن ℓ هو المحور الثاني و α الزاوية بين المحورين. بتحريك المحور ℓ حول محور التناظر الأفقي أولاً فإن المحور الثاني سيصنع زاوية $-\alpha$ مع المحور الأفقي. إذن، المستقيم m الذي يصنع زاوية مع المحور الأفقي هو أيضًا محور تناظر. وبما أنه يوجد محوران للتناظر فقط فإن $\ell = m$.

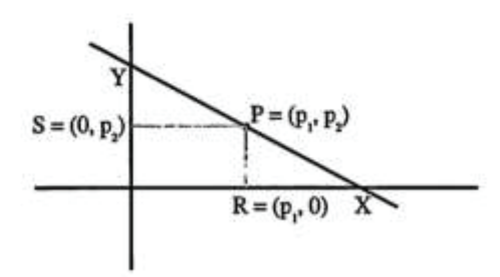
إذن، $\alpha = 90^\circ$.

(٣١,٢)

لاحظ أن الحلّ لا يعتمد على معرفة نصف قطر الحفرة r . ولذا فإن حساباتنا لا تعتمد على قيمة r . ولهذا يمكن اعتبار أن $r = 0$ (أي قيمة أخرى تصلح ولكنها ستعقد الحسابات). في هذه الحالة يكون حجم الجزء المتبقي يساوي حجم الجسم الكروي الأصلي. بما أن طول الحفرة يساوي 6 إنشات فإن قطر الكرة يساوي 6 إنشات. أي أن حجمها يساوي 36π . وبهذا يكون حجم الجزء المتبقي يساوي 36π .

(٣٢,٢)

لنفرض أن $P(p_1, p_2)$ وأن $X = (x, 0)$ هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات وأن $Y = (0, y)$ هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات. لنفرض أن $R = (p_1, 0)$ و $S = (0, p_2)$ كما هو مبين في الشكل التالي:



بما أن المثلثين ΔYSP و ΔRXP متشابهان فإن

$$\frac{y-p_2}{p_2} = \frac{p_1}{x-p_1}$$
$$y = \frac{p_2 x}{x-p_1}$$

لنفرض أن مساحة المثلث هي $A(x)$. عندئذ،

$$A(x) = \frac{xy}{2} = \frac{p_2}{2} \times \frac{x^2}{x-p_1}$$

المطلوب الآن هو إيجاد قيمة x التي تجعل مساحة المثلث أصغرية. ولهذا الغرض نجد من المتباينة:

$$0 \leq (x-2p_1)^2 = x^2 - 4p_1(x-p_1)$$

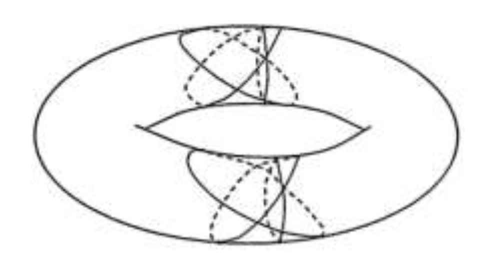
أن:

$$4p_1 \leq \frac{x^2}{(x-p_1)}$$

ومن ذلك نجد أن $A(x) \leq 2p_1p_2$. ولكن $A(2p_1) = 2p_1p_2$. إذن، نحصل على مساحة أصغرية عندما يكون $x = 2p_1$ و $y = 2p_2$.

(٢٫٣٩)

الشكل التالي يبين إمكانية تقسيم الطارة إلى 12 جزءاً باستخدام 3 تقطيعات مستوية:



ولكننا لا نستطيع إثبات أن هذا العدد من الأجزاء هو العدد الأعظمي الذي نحصل عليه باستخدام 3 تقطيعات.

(٤١,٢)

طول كل من التقريبات الثلاثة يساوي 2 (لاحظ أنه في التقريب n لدينا n من الخطوات للأعلى طول كل منها $\frac{1}{n}$ و n من الخطوات للأيسر طول كل منها $\frac{1}{n}$، وبهذا نحصل على الطول 2). إن هذا يقترح أن يكون طول القطر 2. ولكن باستخدام مبرهنة فيثاغورس نعلم أن طول القطر هو $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$. وبهذا يظهر أن لدينا تناقض. في الحقيقة لا يوجد تناقض هنا: طول نهاية متتالية من المجموعات ليس بالضرورة أن يكون مساوياً لنهاية أطوال المجموعات. لاحظ إمكانية أن يكون منحنيان قريبان جداً من بعضهما ولكنهما مختلفان في الطول. على سبيل المثال، في الشكل التالي المنحنى الذي يأخذ شكل المنشار قريب جداً من القطعة المستقيمة ولكنه أطول بكثير من القطعة المستقيمة.

مسـائـل في العـد
Problems Involving Counting

(١,٣)

لنفرض أن اللاعبين هما A و B . إذا حصل اللاعب A على ورقة واحدة فإن عدد الخيارات هنا يساوي n (أي ورقة من الورقات n).

إذا حصل اللاعب A على ورقتين فعدد الطرق في هذه الحالة هو $\binom{n}{2}$.

وهكذا، إذا حصل اللاعب على k ورقة فعدد الطرق في هذا الحالة هو $\binom{n}{k}$.

إذن، العدد الكلي لطرق توزيع n ورقة بين لاعبين هو:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = 2\ \ 2^{n-1} - 1$$

ويمكن برهان صواب هذه المتطابقة على النحو التالي:

من الكتاب نعلم أن:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^{n}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n}\\ &= 2^{n} - 1 - 1\\ &= 2(2^{n-1} - 1),\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(٣,٣)

دعنا نحدد نوعية أول أربعة أعداد من كل صف. لنفرض أن o يرمز لعدد فردي وأن e يرمز لعدد زوجي. أول أربعة أعداد من كل صف ابتداءً من الصف الثالث هي:

الصف الثالث:	$1, e, o, e, \ldots$
الصف الرابع:	$1, o, e, o, \ldots$
الصف الخامس:	$1, e, e, e, \ldots$
الصف السادس:	$1, o, o, e, \ldots$
الصف السابع:	$1, e, o, e, \ldots$

$$\vdots$$

لاحظ أن النمط يتكرر ابتداءً من الصف السابع. بما أن كل من الصفوف الثالث إلى السادس يحتوي على عدد زوجي في أول أربعة أعداد من أعداده وأن النمط يتكرر بعد ذلك فإنه يوجد عدد زوجي واحد على الأقل من بين أول أربعة أعداد من أعداد أي صف.

(٥,٣)

نستخدم الاستراتيجية التالية: نفرض أن عدد أطفال الزوجين هو n ونحسب احتمال أن يكون لديهما ولدان وبنت ومن ثم نجد n بحيث يكون هذا الاحتمال أكبر من $\frac{1}{2}$. الآن

$$P(\text{ولدان وبنت}) = 1 - \quad P(\text{أقل من ولدان}) + P(\text{أقل من بنت})$$

$$= 1 - \left[P(\text{عدم وجود أولاد}) + P(\text{ولد واحد}) + P(\text{عدم وجود بنت}) \right]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right)$$

نحتاج إيجاد أصغر عدد n يحقق

$$1-\left(\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)>\frac{1}{2}$$

أي $2^{n-1}>n+2$. بالتجريب نجد أن $n=4$.

(٧,٣)

هذه مسألة صعبة يحتاج حلّها إلى معرفة بعض مفاهيم الاحتمالات المتقدم. سنحصل على ورقة لعب من مجموعة أوراق اللعب التي عددها 52 مع شراء علبة واحدة من بطاقات لعبة كرة الأرض. سنقوم بحل المسألة العامة. نفرض أن عدد مجموعة أوراق اللعب هو n مرقمة من 1 إلى n وأننا سنحصل على ورقة واحدة مع شراء علبة واحدة من البطاقات. ولنفرض أن X_n هو عدد مرات الشراء التي نحتاجها للحصول على مجموعة الأوراق n. المطلوب هو حساب:

$$E[X]=1P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+mP(X=m)+\cdots$$

سنجد الآن:

$P(X_n\geq k)$. إذا كان $k\leq n$ فإن $P(X_n\geq k)=1$.

إن إثبات ذلك يكون في العادة صعبًا، لكننا سنبرهنه على النحو التالي:

$$P(X_n\geq k)=P(\text{بعض الأوراق غير موجودة بعد إجراء } k-1 \text{ شراء})$$

وهذا الاحتمال هو احتمال اتحاد الحوادث :

$$A_i^k=\{\text{الورقة } i \text{ غير موجودة بعد إجراء } k-1 \text{ شراء}\}$$

لكل $1\leq i\leq n$.

حساب احتمال اتحاد n من الحوادث يتم باستخدام الصيغة التالية التي يمكن إثبات صوابها بالاستقراء الرياضي ونترك ذلك كتمرين للقارئ. ينصح بإثباتها أولاً لبعض الحالات البسيطة مثل $n=1,2,3$ (انظر: أيضًا تمرين رقم ١٩ من هذا الفصل).

$$P(A_1^k \cup A_2^k \cup A_3^k \cup \cdots \cup A_n^k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i^k) - \sum_{i<j} P(A_i^k \cap A_j^k) + \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1}^k \cap A_{i_2}^k \cap A_{i_3}^k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{d+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_d} P(A_{i_1}^k \cap A_{i_2}^k \cap \cdots \cap A_{i_d}^k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1^k \cap A_2^k \cap A_3^k \cap \cdots \cap A_n^k)$$

الآن، $P(A_i)$ احتمالات متساوية لكل i (احتمال عدم وجود الورقة 1 هو نفسه احتمال عدم وجود أي ورقة). احتمال عدم وجود الورقة i بعد الشراء $k-1$ هو:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

احتمال عدم وجود ورقتين (أي $P(A_i^k \cap A_j^k)$) لا يعتمد على i و j ويساوي:

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1}$$

وبصورة عامة، احتمال عدم وجود d ورقة (أي $P(A_{i_1}^k \cap A_{i_2}^k \cap \cdots \cap A_{i_d}^k)$) لا يعتمد على $i_1, i_2, \ldots, i_j$ ويساوي:

$$\left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-1}$$

الآن، باستخدام الصيغة المقدمة سابقًا نجد أن:

$$P(X_n \geq k)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} - \sum_{i<j}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1} + \sum_{i_1<i_2<i_3}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{k-1}$$
$$+\cdots+(-1)^{d+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_d}\left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-1}$$
$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{n-n}{n}\right)^{k-1}$$

عدد حدود المجموع في السطر الثالث من الصيغة يساوي $\binom{n}{d}$. باستخدام هذه الحقيقة وتجاهل الحد الأخير (يساوي 0) يمكن إعادة كتابة الصيغة كالتالي:

$$P(X_n \geq k)$$
$$= \binom{n}{1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} - \binom{n}{2}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1} + \binom{n}{3}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{k-1}$$
$$+\cdots+(-1)^{d+1}\binom{n}{d}\left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-1}$$
$$+\cdots+(-1)^{n}\binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

أي أن:

$$P(X_n \geq k) = \sum_{d=1}^{n-1}(-1)^{d+1}\binom{n}{d}\left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-1}$$

بعد أن وجدنا $P(X_n \geq k)$ نستطيع الآن إيجاد $P(X_n = k)$ واستخدام صيغة $E[X_n]$ المقدمة سابقاً، ولكننا عوضاً عن ذلك نستخدم الصيغة التالية:

$$E[X_n] = \sum_{k=1}^{\infty} i \times \quad X_n = k$$

بما أن الضرب بالعدد i يساوي جمع i من الحدود نجد أن:

$$E[X_n] = \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} P(X_n = k)$$

وبتبديل ترتيب المجموع نجد أن:

$$E[X_n] = \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} P(X_n = k)$$

ولكن لدينا أيضاً

$$\sum_{k=j}^{\infty} P(X_n = k) = P(X_n \geq j)$$

وبهذا نحصل على الصيغة

$$E[X_n] = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_n \geq j)$$

إذن، نجد في حالتنا أن (تذكر أن $P(X \geq k) = 1$ لكل $k \leq n$):

$$E[X_n] = \sum_{j=1}^{n} 1 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{d=1}^{n-1} (-1)^{d+1} \binom{n}{d} \left(\frac{n-d}{n} \right)^{j-1}$$

بتبسيط المجموع الأول وإعادة ترتيب المجموع الثاني نجد:

$$E[X_n] = n + \sum_{d=1}^{n-1} (-1)^{d+1} \binom{n}{d} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{n-d}{n} \right)^{j-1}$$

وباستخدام صيغة مجموع المتتالية الهندسية نحصل على:

$$E[X_n] = n + \sum_{d=1}^{n-1} (-1)^{d+1} \binom{n}{d} \frac{n}{d} \left(\frac{n-d}{n} \right)^{n}$$

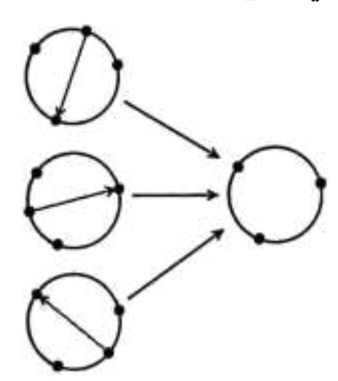
وهذه في الحقيقة هي الصيغة النهائية. الآن، بوضع $n = 52$ نستطيع

استخدام الحاسب الآلي لإيجاد $E[X_n]$. استخدمنا برنامج ماثيمتكا عند $n = 52$ وحصلنا على $E[X_{52}] = 235.978$.

(٩,٣)

إذا وقعت جميع النقاط في أحد نصفي القرص فإن قياس الزاوية التي نحصل عليها من الشعاعين اللذين يمران بنقطتين من النقاط الثلاثة وتحتوي النقطة الثالثة لا يزيد على $180°$. إذا استبدلنا النقطة الوسطى بالنقطة التي تقابلها قطرياً فإن النقاط لا تكون جميعاً في أحد نصفي القرص.

من ذلك نجد أن استبدال النقطة الوسطى بالنقطة التي تقابلها قطرياً يؤدي إلى الحصول على دالة من مجموعة {الأشكال في أحد النصفين} إلى مجموعة {الأشكال في نصفين مختلفين} . هذه الدالة هي 3 إلى 1 : كل شكل من النقاط التي لا تقع جميعاً في نصف واحد من القرص له ثلاث صور عكسية تحت تأثير الدالة كما هو مبين في الشكل التالي:



إذن، يوجد تقابل 3 إلى 1 بين المجموعات {الأشكال في أحد النصفين} والمجموعات {الأشكال في نصفين مختلفين} . وبهذا يكون، احتمال عدم وقوع النقاط في أحد نصفي القرص يساوي $\frac{1}{4}$.

(٣,١١)

على الرغم من تشابه هذه المسألة مع المسألتين السابقتين، إلا أنها أسهل منهما بكثير. افترضنا مسبقًا أن المربع مقسوم قطريًا أو أفقيًا أو بأي طريقة أخرى. عندئذ، احتمال أن تقع أي من النقاط في أحد نصفي المربع يساوي $\frac{1}{2}$. ولهذا احتمال وقوع الثلاث نقاط جميعًا في أحد نصفي المربع هو $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

وبما أن المربع مقسوم إلى نصفين فإننا نخلص إلى أن احتمال وقوع جميع النقاط الثلاث في نفس النصف هو:

$$2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}.$$

(٣,١٣)

النقطة الوحيدة المهمة في المسألة السابقة هي ترتيب الأعداد وليس قيمة الأعداد. ومع أننا لا نعرف قيم الأعداد في هذه المسألة، إلا أن ترتيبها لا زال قائمًا، وهذا هو المهم. إذن، إجابة هذه المسألة هي نفس إجابة المسألة السابقة.

(٣,١٥)

الخطوة الأولى: املأ الوعاء الذي سعته 8 لتر. بعد ذلك استخدم هذا الوعاء لتفريغ 5 لترات في الوعاء الذي سعته 5 لترات. وبهذا يتبقى في الوعاء 3 لتر.

الخطوة الثانية: اسكب ماء الوعاء الذي سعته 5 لترات وضع فيه 3 لترات ماء من الوعاء الآخر. بعد ذلك املأ الوعاء الذي سعته 8 لترات واستخدم منه لترين لتعبئة الوعاء الذي سعته 5 لترات. الآن، يبقى 6 لترات في الوعاء الذي سعته 8 لترات.

الخطوة الثالثة: اسكب ماء الوعاء الذي سعته 5 لتر واملأه من الوعاء الذي سعته 8 لترات. عندئذ، يتبقى 1 لتر في الوعاء الذي سعته 8 لترات.

(١٧.٣)

عدد خانات الصفحات من 1 إلى 9 يساوي $9 = 1 \times 9$. عدد خانات الصفحات من 10 إلى 99 يساوي $180 = 2 \times 90$. عدد خانات الصفحات من 100 إلى 750 يساوي $1953 = 3 \times 651$.

إذن، عدد الخانات الكلية اللازمة هو

$$9 + 180 + 1953 = 2141.$$

(١٩.٣)

أسهل طريقة لحلِّ هذه المسألة هي الاستعانة بأشكال فن وأيضًا يمكن استخدام صيغة برهانها ليس صعبًا إذا استعنا بأشكال فن وهي:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

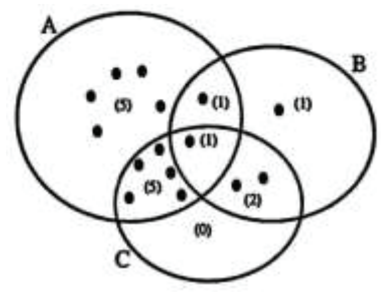
حيث A، B، C مجموعات منتهية و $|.|$ يعني عدد عناصر المجموعة. في حالتنا، A تعني "جبر" و B تعني "أحياء" و C تعني "كيمياء". وبهذا يكون عدد الطلاب الذين لم يجتازوا أحد الاختبارات على الأقل هو:

$$12 + 5 + 8 - 2 - 6 - 3 + 1 = 15$$

وبالتالي فإن عدد الطلاب الذين اجتازوا الاختبارات الثلاثة هو:

$$41 - 15 = 26$$

شكل فن التالي يوضح ذلك:



(٢١،٣)

في الحقيقة إن التقرير "معظم السكان ينتمون إلى عائلات عدد أعضاءها أكبر من المتوسط" هو تقرير صائب، ويمكن إثبات ذلك على النحو التالي: لنفرض أن f_i هو عدد العائلات التي عدد أطفالها i ولنفرض أن c_i عدد أطفال العائلات التي عدد أفرادها i. عندئذ، $c_i = if_i$. متوسط عدد أفراد العائلة هو مجموع عدد العائلات مضروب بعدد أفرادها وهذا مقسوم على عدد العائلات الكلي. أي أن:

$$Av_f = \frac{\sum_{i=1}^{K} if_i}{\sum_{i=1}^{K} f_i}$$

حيث K هو أكبر عدد من الأطفال لأي عائلة. ومن ناحية أخرى، إذا اخترنا شخصاً فما متوسط عدد أعداد عائلته؟ هذا السؤال يختلف عن السؤال السابق. للإجابة عنه يجب أن نجد مجموع عدد الأشخاص مضروباً بعدد أفراد عائلة كل من هؤلاء الأشخاص ثم نقسم ذلك على العدد الكلي للأفراد. أي أن:

$$Av_p = \frac{\sum_{i=1}^{K} ic_i}{\sum_{i=1}^{K} c_i} = \frac{\sum_{i=1}^{K} i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{K} if_i}$$

سنبرهن أن $Av_f \leq Av_p$. أي أننا سنبرهن أنه لو اخترنا فرداً عشوائياً فإنه في المتوسط ينتمي إلى عائلة عدد أفرادها أكبر من المتوسط. ولهذا نحتاج إلى إثبات أن:

$$\frac{\sum_{i=1}^{K} if_i}{\sum_{i=1}^{K} f_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{K} i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{K} if_i}$$

أي إثبات أن:

$$\left(\sum_{i=1}^{K} if_i\right)\left(\sum_{i=1}^{K} if_i\right) \le \left(\sum_{i=1}^{K} i^2 f_i\right)\left(\sum_{i=1}^{K} f_i\right)$$

بالضرب نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{K} ijf_i f_j \le \sum_{i=1}^{K} i^2 f_i f_j$$

من ذلك نرى أن:

$$\sum_{1\le i\le j\le K} ijf_i f_j + \sum_{1\le j<i\le K} ijf_i f_j \le \sum_{1\le i\le j\le K} i^2 f_i f_j + \sum_{1\le j<i\le K} i^2 f_i f_j$$

بتبديل i و j في المجموع الأخير نجد أن:

$$\sum_{1\le i\le j\le K} ijf_i f_j + \sum_{1\le j<i\le K} ijf_i f_j \le \sum_{1\le i\le j\le K} i^2 f_i f_j + \sum_{1\le i<j\le K} j^2 f_j f_i$$

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$\sum_{1\le i\le j\le K} ijf_i f_j + \sum_{1\le i<j\le K} jif_i f_j + \sum_{1\le i\le K} i^2 f_i^2$$

$$\le \sum_{1\le i\le j\le K} i^2 f_i f_j + \sum_{1\le i<j\le K} j^2 f_j f_i + \sum_{1\le i\le K} i^2 f_i^2$$

بطرح $\sum_{1\le i\le K} i^2 f_i^2$ من الطرفين نجد أن:

$$\sum_{1\le i\le j\le K} ijf_i f_j + \sum_{1\le i<j\le K} jif_i f_j \le \sum_{1\le i\le j\le K} i^2 f_i f_j + \sum_{1\le i<j\le K} j^2 f_j f_i$$

الآن، مجموعي الطرف الأيسر متساويان ويمكن أخذ $f_j f_i$ مشترك من الطرف الأيمن لنحصل على:

$$\sum_{1\le i<j\le K} 2ijf_i f_j \le \sum_{1\le i<j\le K} (i^2 + j^2) f_i j_j$$

وأخيرًا، بملاحظة أن:

$$0 \leq (i-j)^2 = i^2 + j^2 - 2ij$$

نجد أن $2ij \leq i^2 + j^2$. إذن، معاملات $f_i f_j$ في الطرف الأيسر أصغر من أو تساوي نظيراتها في الطرف الأيمن. إذن، المتباينة صائبة، وبهذا نكون قد أثبتنا أن معظم الناس ينتمون إلى عائلات عدد أفرادها أكبر من المتوسط.

(٣.٢٣)

كم عدد الطرق المختلفة لتوزيع l حبة عنب على k من الكؤوس ؟ عدد هذه الطرق هو $\binom{k}{l}$. إذن، عدد المجموعات الجزئية من المجموعة S هو عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على 0 من العناصر مضافًا إلى ذلك عدد المجموعات الجزئية ذات العنصر الواحد مضافًا إلى ذلك عدد المجموعات الجزئية ذات العنصرين وهكذا. أي أن هذا العدد يساوي:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k}$$

بالاستعانة بمبرهنة ذات الحدين نجد أن هذا المجموع يساوي 2^k.

(٣.٢٥)

احتمال أن يكون الجانب الآخر من الكرت أحمر أيضًا هو احتمال أن نكون قد سحبنا الكرت الأحمر على الجانبين. ولهذا فإن احتمال اختيار كرت أحمر على الجانبين مع المعرفة المسبقة بأن أحد الجانبين أحمر هو $\frac{2}{3}$.

(٣.٣)

تحليل العدد 30^4 إلى قوى عوامله الأولية هو:

$$30^4 = 2^4 \times 3^4 \times 5^4$$

قواسم 30^4 يجب أن تكون على الصورة $2^a \times 3^b \times 5^c$ حيث a و b و c أعداد صحيحة غير سالبة لا تزيد على 4 . إذن، عدد القواسم هو عدد الثلاثيات المرتبة (a,b,c) حيث $0 \le a,b,c \le 4$. وهذا العدد يساوي $125 = 5 \times 5 \times 5$.

(٢٩،٣)

نجد عدد الخانات المستخدمة لترقيم الكتاب. لترقيم الصفحات من 1 إلى 9 نحتاج $9 = 1 \times 9$ خانة. لترقيم الصفحات من 10 إلى 99 نحتاج $180 = 2 \times 90$ خانة. لترقيم الصفحات من 100 إلى 666 نحتاج إلى $1701 = 3 \times 567$ خانة. الآن، العدد الكلي للخانات المستخدمة هو:

$9 + 180 + 1701 = 1890$ خانة.

إذن، عدد صفحات الكتاب هو 666 صفحة.

(٣١،٣)

الصيغة العامة هي:

$$\begin{aligned} &1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \end{aligned}$$

إذا كان n زوجيًّا فيمكن كتابة الطرف الأيسر على النحو:

$$\begin{aligned} &1^2 - 2^2 \;+\; 3^3 - 4^2 \;+ \cdots +\; (n-1)^2 - n^2 \\ &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \cdots \\ &\quad + \;(n-1) - n \quad (n-1) + n \\ &= -(1+2) - (3+4) - \cdots - \;(n-1) + n \\ &= -(1 + 2 + 3 + \cdots + n), \end{aligned}$$

وهذه هي الصيغة المطلوبة.

أما إذا كان n فردياً فإن الطرف الأيسر يساوي:

$$
\begin{aligned}
1^2 - 2^2 \; + \; 3^2 - 4^2 \; + \cdots + \; (n-2)^2 - (n-1)^2 \; + n^2 \\
&= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \cdots \\
&\qquad + \; (n-2) - (n-1) \;\; (n-2) + (n-1) \; + n^2 \\
&= -(1+2) - (3+4) - \cdots - \; (n-2) + (n-1) \; + n^2 \\
&= - \; 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \; + 2(1 + 2 + 3 + \cdots n) - n \\
&= 1 + 2 + 3 + \cdots + n
\end{aligned}
$$

وهي الصيغة المطلوبة.

لاحظ أننا استخدمنا الصيغة المقدمة في التمرين السابق لنجد أن:

$$
\begin{aligned}
2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= n^2 + n - n \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

(٣,٣٣)

الصيغة المطلوبة هي:

$$
\begin{aligned}
(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + (n^2 - n + 5) \\
+ \cdots + (n^2 - n + (2n-1)) = n^3
\end{aligned}
$$

لاحظ أن عدد حدود الطرف الأيسر يساوي n وأن:

$$
n \times n^2 - n \times n + (1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1)
$$

الآن:

$$
\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 \\
&= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + \cdots + (2 \times n - 1) \\
&= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - (\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ مرة}}) \\
&= 2 \times \frac{n^2 + n}{2} - n \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

ولهذا نجد أن:

$$n \times n^2 - n \times n + (1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) = n^3 + n^2 - n = n^3$$

وهذه هي الصيغة المطلوبة.

(٣.٢٥)

يمكن إيجاد احتمال أن تكون كلمة TOLEDO صحيحة على النحو التالي:

احتمال أن يكون الحرف T في الموقع الصحيح هو $\frac{1}{20}$ لأن عدد الحروف هو 10 ويمكن وضع الحرف T بطريقتين (صحيحًا أو مقلوبًا). احتمال أن يكون موقع O صحيحًا إذا كان موقع T صحيحًا هو $\frac{4}{9}$ لأن عدد الحروف المتبقية هو 9 و 4 حروف منها هي O وكيفية وضع الحرف O يتم بطريقة واحدة. احتمال أن يكون موقع الحرف L صحيحًا إذا كان موقع الحرفين T و O صحيحًا هو $\frac{1}{16}$ (بقي 8 حروف وخيارين لوضع L) وهكذا لبقية الحروف. إذن، احتمال أن تكون كلمة TOLEDO صحيحة هو:

$$\frac{1}{20} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{14} \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{201600} \approx 4.96032 \times 10^{-6}$$

وبطريقة مماثلة نجد أن احتمال أن تكون كلمة OHIO صحيحة هو:

$$\frac{4}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{420} \approx 2.38095 \times 10^{-3}$$

احتمال أن تكون الكلمتان TOLEDO و OHIO صحيحتان هو احتمال أن تكون كلمة TOLEDO صحيحة مضروباً في احتمال أن تكون كلمة OHIO صحيحة إذا علمنا أن TOLEDO صحيحة. هذا الاحتمال هو:

$$\frac{1}{201600} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2419200} \approx 4.1336 \times 10^{-7}.$$

(٣.٣٧)

لاحظ أولاً أنه للفريقين اللذان لعبا المباراة الأولى يكون عدد مرات الخسارة هو عدد المباريات (العدد الكلي للمباريات هو 11) التي لم يلعبا بها. السبب في ذلك هو أن الفريق يلعب مباراة إذا وفقط إذا خسر المباراة السابقة وأن أحد الفريقين فاز في المباراة الأخيرة ضد فريق نيويورك هذا أيضًا ينطبق على فريق نيويورك ماعدا المباراة الأولى التي لعبها فريق نيويورك من دون أن يكون قد خسر في مباراة سابقة، لكن قد تم تعويض ذلك لأن فريق نيويورك قد خسر المباراة الأخيرة (لاحظ أنه يمكن النظر إلى ذلك كأن فريق نيويورك لم يلعب المباراة الأولى لأنه خسر المباراة الأخيرة). إذن، لكل فريق نجد أن عدد المباريات التي خسرها هو عدد المباريات التي لم يشارك فيها. وبهذا يكون لدينا لكل فريق:

عدد مباريات الفوز $+$ عدد مباريات الخسارة $+$ عدد المباريات التي لم يشارك بها $=$ عدد المباريات الكلية $11 =$. أي أنه لكل فريق يكون:

عدد مباريات الفوز $+$ ضعف عدد مباريات الخسارة $11 =$.

إن هذا يعني أن عدد المباريات التي فاز بها كل فريق هو عدد فردي.

لنفرض أن w_1 ، w_2 ، w_3 هو عدد المباريات التي فاز بها كل فريق. لاحظ أن الأعداد w_1 و w_2 و w_3 مختلفة (افترضنا أن عدد المباريات التي فازت بها الفرق مختلفة). إذن، الأعداد w_1 و w_2 و w_3 فردية مختلفة ومجموعها 11. بالتجريب نجد أن هذه الأعداد هي 1، 3، 7. ومن المعادلة الأخيرة نجد أن الفريق الذي فاز 7 مباريات خسر مباراتين والفريق الذي فاز 3 مباريات خسر 4 مباريات والفريق الذي فاز مباراة واحدة خسر 5 مباريات.

لاحظ أن هذا لا يحدد أي من الفرق الثلاث فاز بمباراة واحدة أو 3 مباريات أو 7 مباريات. في الحقيقة يمكن تصميم جدول بحيث يفوز فريق نيويورك بمباراة واحدة أو 3 مباريات أو 7 مباريات. لهذا فإنه لا يمكن تحديد عدد مباريات فوز كل من الفرق من بيانات المسألة.

(٣,٣٩)

احتمال الحصول على 12 عند إلقاء حجري نرد 24 مرة هو:

$$12\ 1 - P(\text{عدد الحصول على}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{4}\left(\frac{7}{6}\right)^{24}\left(\frac{5}{6}\right)^{20}$$

$$= 1 - 0.508596$$

$$= 0.491404$$

$$< 0.5$$

زاد تشفالير دي ميري من مبلغ الرهان على الرغم من أت اللعبة ليست صالحة. في واقع الأمر سيدفع له 98.2808 فرنكًا لكل 100 فرانك يراهن بها.

(٣,٤١)

عدد مخرجات كل إلقاء لقطع النقود الخمسة هو $32 = 2^5$. يمكن إيجاد عدد مخرجات إنهاء اللعبة على النحو التالي: إذا انتهت اللعبة فإن أحد اللاعبين قد حصل على كتابة والآخرين حصلوا على صور أو العكس. إذن، كل لاعب يكسب مرتين لكل 32 رمية. إذن، عدد المخرجات التي تنتهي اللعبة هو $2\times 5 = 10$. وبهذا يكون احتمال إنهاء اللعبة بعد الرمية الأولى هو $\frac{5}{16}$ واحتمال إنهاء اللعبة بعد الرمية الثانية هو احتمال عدم فوز أي من اللاعبين في الرمية الأولى مضروبًا في احتمال فوز أحد اللاعبين بعد الرمية الثانية. إذن، احتمال إنهاء اللعبة بعد الرمية الثانية هو:

$$\left(1 - \frac{5}{16}\right) \times \frac{5}{16} = \frac{55}{256}.$$

(٣,٤٣)

سنتبع خطة حل المسألة (٣,٣,٣). لذا نفرض أن:

$$F(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \dots$$

لاحظ أن:

$$3xF(x) = 3a_0x + 3a_1x^2 + 3a_2x^3 + 3a_3x^4 + 3a_4x^5 \dots$$

وأن:

$$x^2F(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + a_4x^6 \dots$$

بتجميع الحدود المتشابهة نحصل على:

$$\begin{aligned} &F(x) - 3xF(x) + x^2F(x) \\ &= a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1 + a_0)x^2 \\ &\qquad + (a_3 - 3a_2 + a_1)x^3 + (a_4 - 3a_3 + a_2)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

وبما أن :

$$a_j - a_{j-1} + a_{j-2} = 0$$

فيمكن تبسيط الصيغة السابقة لنجد أن:

$$F(x) - 3xF(x) + x^2F(x) = a_0 + (a_1 - 3a_0)x$$

وبما أن:

$$a_0 = 2 \text{ و } a_1 = 1$$

نجد أن

$$F(x)(1 - 3x + x^2) = 2 - 5x$$

أي أن:

$$F(x) = \frac{2 - 5x}{1 - 3x + x^2}$$

بضرب الصيغة السابقة نجد:

$$F(x) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left[\frac{1}{1 - \frac{2}{3 - \sqrt{5}}x}\right] + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left[\frac{1}{1 - \frac{2}{3 + \sqrt{5}}x}\right]$$

ويمكن كتابة ذلك على الصورة:

$$F(x)=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3-\sqrt{5}}x\right)^{j}+\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{3}{3+\sqrt{5}}x\right)^{j}$$

إذن، معامل x^j في الصيغة السابقة هو:

$$\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{3-\sqrt{5}}\right)^{j}+\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{j}$$

ومن ناحية أخرى لدينا:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j x^j$$

إذن:

$$a_j=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{3-\sqrt{5}}\right)^{j}+\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{j}$$

(٣.٤٥)

بطريقة مشابهة للمسألتين السابقتين نجد أن الإجابة هي:

$$a_j=1-2^j\,.$$

(٣.٤٧)

بطريقة مشابهة للتمرين السابق نجد أن الاحتمال المطلوب هو:

$$\frac{\binom{12}{1}\binom{40}{k-1}}{\binom{52}{k}}$$

لاحظ أن الاحتمال يساوي 1 عندما يكون $k>40$ (باستخدام مبدأ برج الحمام).

(٤٩.٣)

سنفترض أن احتمال أن تكون البقرة مريضة (وهو $\frac{1}{500}$) لا يعتمد على أن البقرات الباقية سليمة أو مريضة. إذن، احتمال أن تكون بقرة مصابة بالمرض من بين مجموعة عشوائية مختارة عددها 100 هو $\frac{1}{5}$. العدد المتوقع لمجموعة من البقر عددها 100 هو:

$$1\times P(\text{تكون جميعها سليمة}) + 101\times P(\text{بعضها مصاب بالمرض})$$
$$= 1\times\frac{4}{5} + 100\times\frac{1}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

إذن، العدد المتوقع للاختبارات على 5000 بقرة هو $50\times 21 = 1050$.

(٥٣.٣)

سنجد احتمال أن يكون لدى اللاعب الآخر زوج أو أفضل من ذلك (أي زوج أو زوجان أو 3 أوراق متشابهة أو بيت كامل أو بوكر) إذا كان لديك زوج أو كانت جميع أوراقك مختلفة. نفرض أولاً أن جميع أوراقك مختلفة. لاحظ أنه ليس مهماً تحديد نوع هذه الأوراق طالما أنها مختلفة. لذا يمكن افتراض أن هذه الأوراق هي 1، 2 ، 3، 4، 5 من نوع القلب (1 يعني آص). المطلوب إيجاد احتمال أن يكون لدى اللاعب الآخر زوج أو أفضل من ذلك. لاحظ أن:

$$P(\text{زوج أو أفضل}) = 1 - P(\text{جميع الأوراق مختلفة})$$

لذا ستجد احتمال أن تكون جميع الأوراق مختلفة. عدد الطرق لاختيار 5 أوراق من مجموعة أوراق عددها 47 هو $\binom{47}{5}$. سنجد الآن كم عدداً من بينها لا يحتوي على زوج. ولهذا الغرض ندرس الحالات التالية:

- إذا كانت جميع أوراق اللاعب الآخر تنتمي إلى المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ فإن

عدد التوزيعات التي لا تحتوي على زوج هو 3^5 (عدد خيارات 1 هو 3 وعدد خيارات 2 هو 3 وهكذا).

- إذا كانت أربع أوراق بالضبط من أوراق اللاعب الآخر تنتمي إلى المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ فإن عدد التوزيعات التي لا تحتوي على زوج هو $4^1\binom{8}{1}3^4\binom{5}{4}$ لأن عدد طرق اختيار 4 أوراق من المجموعة هو $\binom{5}{4}$ وعدد خيارات كل ورقة منها هو 3 وعدد طرق اختيار ورقة من المجموع $\{6,7,8,9,10,J,Q,K\}$ هو $\binom{8}{1}$ ويمكن اختيار هذه الورقة بأربعة طرق.
- إذا كانت ثلاث أوراق بالضبط من أوراق اللاعب الآخر تنتمي إلى المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو $4^2\binom{8}{2}3^3\binom{5}{3}$.
- إذا كانت ورقتان بالضبط من أوراق اللاعب الآخر تنتمي إلى المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو $4^3\binom{8}{3}3^2\binom{5}{2}$.
- إذا كانت ورقة واحدة فقط من أوراق اللاعب الآخر تنتمي إلى المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو $4^4\binom{8}{2}3^1\binom{5}{1}$.
- إذا كانت جميع أوراق اللاعب الآخر لا تنتمي إلى المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ فإن عدد طرق هذه الحالة هو $4^5\binom{8}{5}$.

إذن، احتمال أن يكون لدى اللاعب الآخر زوج أو أفضل عندما تكون جميع أوراقك مختلفة هو:

$$1-\frac{1}{\binom{47}{5}}\left(3^5+\binom{5}{4}3^4\binom{8}{1}4^1+\binom{5}{3}3^3\binom{8}{2}4^2+\binom{5}{2}3^2\binom{8}{3}4^3\right.$$

$$\left.+\binom{5}{1}3^1\binom{8}{4}4^4+\binom{8}{5}4^5\right)$$

سنجد الآن احتمال أن تكون جميع أوراق اللاعب الآخر مختلفة عندما يكون لديك زوج. كما في السابق سنفترض أن أوراقك هي 1 شيرة و $1,2,3,4$ قلب. نحتاج لدراسة جميع الحالات المختلفة ونجد عدد طرق كل حالة بأسلوب مشابه لما سبق.

- إذا كانت أوراق اللاعب الآخر هي 1 وثلاث أوراق تنتمي إلى المجموعة $\{2,3,4\}$ فإن عدد طرق مجموعة من الأوراق لا تحتوي على زوج هو $2\times 3^3\times\binom{9}{1}\times 4^1$ (يوجد خياران للعدد 1 و 3 خيارات لكل ورقة في المجموعة $\{2,3,4\}$ و $\binom{9}{1}$ طريقة لاختيار ورقة من المجموعة $\{5,6,7,8,9,10,J,Q,K\}$ و 4 خيارات لكل ورقة).
- إذا كانت أوراق اللاعب الآخر هي 1 وورقتان من المجموعة $\{2,3,4\}$ فإن عدد طرق هذه الحالة هو $2\times\binom{3}{2}\times 3^2\times\binom{9}{2}\times 4^2$.
- إذا كانت أوراق اللاعب الآخر هي 1 وورقة واحدة من المجموعة $\{2,3,4\}$ فإن عدد طرق هذه الحالة هو $2\times\binom{3}{1}\times 3^1\times\binom{9}{3}\times 4^3$.
- إذا كانت أوراق اللاعب الآخر هي 1 وليس لديه ورقة تنتمي إلى المجموعة

$\{2,3,4\}$ فإن عدد طرق هذه الحالة هو $2\times\binom{9}{4}\times 4^4$.

وأيضاً، إذا كانت أوراق اللاعب الآخر لا تحتوي على 1 فلدينا الحالات التالية:

- 3 من أوراقه تنتمي إلى المجموعة $\{2,3,4\}$. عدد طرق هذه الحالة $\binom{3}{3}3^3\binom{9}{2}4^2$.
- ورقتان من أوراقه تنتمي إلى المجموعة $\{2,3,4\}$. عدد طرق هذه الحالة هو $\binom{3}{2}3^2\binom{9}{3}4^3$.
- ورقة من أوراقه تنتمي إلى المجموعة $\{2,3,4\}$. عدد طرق هذه الحالة هو $\binom{3}{1}3^1\binom{9}{4}4^4$.
- جميع أوراقه لا تنتمي إلى المجموعة $\{2,3,4\}$. عدد طرق هذه الحالة هو $\binom{9}{5}4^5$.

إذن، احتمال أن يكون لدى اللاعب الآخر زوج أو أفضل عندما يكون لديك زوج هو:

$$1-\frac{1}{\binom{52}{47}}\left(2\times 3^3\times\binom{9}{1}\times 4^1+2\times\binom{3}{2}3^2\times\binom{9}{2}\times 4^2\right.$$
$$+2\times\binom{3}{1}3^1\times\binom{9}{3}\times 4^3+2\times\binom{9}{4}\times 4^4+\binom{3}{3}\times 3^3\times\binom{9}{2}\times 4^2$$
$$\left.+\binom{3}{2}\times 3^2\times\binom{9}{3}\times 4^3+\binom{3}{1}\times 3^1\times\binom{9}{4}\times 4^4+\binom{9}{5}\times 4^5\right)$$

وبحساب هذه الكميات نجد أن احتمال أن يكون لدى اللاعب الآخر زوج أو أفضل عندما لا يكون لديك زوج هو تقريبًا 0.489636 ، واحتمال أن يكون لدى اللاعب الآخر زوج أو أفضل عندما يكون لديك زوج هو تقريبًا 0.495182 وهذا الاحتمال أكبر قليلاً من الاحتمال السابق.

مسائل في المنطق

Problems Of Logic

(٤,١)

(أ) نبدأ بالحرف E . ناتج جمع الحرفين E و O هو O . لذا فإما أن $E=0$ ولا يوجد حمل من العمود السابق أو أن $E=9$ ويوجد حمل من العمود السابق (جمع N و R). لنفرض أن $E=0$. عندئذ، $A=5$ (الخيار الوحيد للحصول على $A+A=0$ في العمود الرابع). لدينا الآن:

$$\begin{array}{r} 1 \\ D\ O\ N\ 5\ L\ D \\ +\ G\ 0\ R\ 5\ L\ D \\ \hline R\ O\ B\ 0\ R\ T \end{array}$$

بما أنه لا يوجد حمل من $N+R$ وأن $5+5=10$ فإن $N+R$ لا يزيد على 8 . وبما أننا استخدمنا العدد 0 فإن N يجب أن يكون 1 فأكبر ومن ثم فإن $R\leq 7$. ومن ناحية أخرى $D+G=R$. لذا فإن $R\geq 3$. الآن، $R\neq 3$ لأنه لو كان $R=3$ فإما أن $D=1$ أو $G=1$ (والآخر يساوي 2) وفي الوقت نفسه ينتج عن $L+L$ العدد 3 في العمود الخامس مما يعني أن $L=1$. إذا كان $R=4$ فإن $L=2$ ، وبما أن $D+G=R=4$ فإن أحد الحرفين D أو G يساوي 1 والآخر يساوي 3 . وبهذا نكون قد استنفدنا الأعداد من 0 إلى 5 . وبهذا فإن $N\geq 6$ مما يؤدي إلى أن $N+R\geq 10$ ومن ثم يكون لدينا حمل من هذا العمود. ولكن هذا يتناقض مع $0+O=O$ في العمود التالي. إذن، $R\neq 4$. وبما أن العدد 5 قد استخدم سابقًا فإن $R=6$ أو $R=7$.

لنفرض أن $R = 6$. عندئذ، $L = 3$ ولا يمكن أن يؤدي $D + D$ إلى حمل. إذن، $D \leq 4$. وفي الوقت نفسه لا يمكن أن يكون N أكبر من 2 لأنه لو كان غير ذلك لأدى $N + R + 1$ إلى حمل غير مرغوب به. إذن، $D \neq 1$ لأنه لو كان غير ذلك سيؤدي إلى $T = 2$ ويكون الخيار التالي للحرف N كبيراً جداً. كما أن $D \neq 2$ لأنه لو كان $D = 2$ فإن $G = T = 4$. إذن، إذا كان $R = 6$ فإن $D = 4$ ونحصل على:

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & D & O & N & 5 & 3 & 4 \\ + & G & 0 & R & 5 & 3 & 4 \\ \hline & R & O & B & 0 & 6 & T \end{array}$$

الآن، لدينا $T = 8$ و $G = 2$. وبهذا فإن N يجب أن يساوي 1 لكن هذا مستحيل لأن B ستساوي 8 ولكننا سبق وأن استخدمنا 8.

الخيار الأخير لقيمة R هو 7. عندئذ، $N = 1$. كما أن $L = 3$ ويجب أن يكون هناك حمل من $D + D$، وهذا يعني أن $L + L = 7$. وبهذا يكون لدينا:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & 1 & \\ & D & O & 1 & 5 & 3 & D \\ + & G & 0 & 7 & 5 & 3 & D \\ \hline & 7 & O & B & 0 & 7 & T \end{array}$$

الآن، $D > 5$ لأنه لو كان غير ذلك فإنه لا يمكن أن نحصل على حمل من $D + D$. وفي الوقت نفسه، بما أن $D + G = R = 7$ فإن $D < 7$. إذن، $D = 6$. ومن ذلك يكون $G = 1$ وهذا مستحيل لأننا سبق وأن استخدمنا 1.

وبهذا نكون قد استنفدنا جميع خيارات R ولا نستطيع الاستمرار. وبهذا لا بد من أن تكون $E = 9$ (وليس $E = 0$). إذن، $A = 4$ ويكون لدينا حمل من

$L+L$ لنحصل على:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & & 1 & & \\ & D & O & N & 4 & L & D \\ + & G & 9 & R & 4 & L & D \\ \hline & R & O & B & 9 & R & T \end{array}$$

بما أن $R=G+D+1$ وكل من D و G لا يساوي صفرًا فإن $R\geq 4$.
ولكن $R\neq 4$ لأن $A=4$. إذن، $R\geq 5$. لنفرض أن $R=5$. عندئذ، $L=7$
ولدينا حمل من $D+D$. وهذا يعني أن $D>5$ وهذا مستحيل لأن
$5=R=G+D+1$. وبالمثل، إذا كان $R=7$ (أو أي عدد فردي آخر) فإن
$D>5$ وهذا مستحيل. إذن، $R=G+D+1$ يؤدي إلى أن يكون $D=5$. إذن،
$G=1$ و $L=8$ ونحصل على:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & & 1 & & \\ & 5 & O & N & 4 & 8 & 5 \\ + & 1 & 9 & 7 & 4 & 8 & 5 \\ \hline & 7 & O & B & 9 & 7 & T \end{array}$$

من الواضح الآن أن $T=0$. وبهذا يتبقى لدينا الأعداد 2، 3، 6.
بالتجريب سنجد أن $N=6$ و $B=3$ و $O=2$.

إذن، نجد أن الحل هو:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & 2 & 6 & 4 & 8 & 5 \\ + & 1 & 9 & 7 & 4 & 8 & 5 \\ \hline & 7 & 2 & 3 & 9 & 7 & 0 \end{array}$$

نترك للقارئ إثبات أن $R=6$ أو $R=8$ لن يؤدي إلى حلول إضافية.

(ج) حصلنا على الحرف T من $TWELVE$ نتيجة حمل من العمود السابق.

وبما أن:

$$SEVEN + EIGHT < 1000000 + 1000000 = 2000000$$

فإن $T = 1$. وبما أن $E + I = E$ فإن $I = 0$ أو $I = 9$.

لنفرض أولاً أن $I = 0$. وبما أننا نحصل على E من $N + T = N + 1$ وأن $E \neq 0$ فلا يوجد حمل هنا. إذن، $N + 1 = E$ ونحصل على:

	S	E	V	E	N
+	E	0	G	H	1
1	W	E	L	V	E

لاحظ أن E تكرر 5 مرات في عملية الجمع، ولذا فإن معرفة قيمة E سيساعدنا كثيراً. ولذا نجرب قيم مختلفة للحرف E. بما أن $N + 1 = E$ وأن $N \geq 2$ فإن $E \geq 3$. إذا كان $E = 3$ فإن:

	S	3	V	3	2
+	3	0	G	H	1
1	W	3	L	V	3

الآن، يجب أن يكون $S \geq 7$، وبهذا يجب أن يكون هناك حمل من العمود الثاني $S + 3$. إن ذلك يعني أن $W \leq 2$. ولكننا استخدمنا جميع هذه القيم. لذا يجب تجريب قيمة أخرى للحرف E.

إذا كان $E = 4$ فإننا نحصل على:

	S	4	V	4	3
+	4	0	G	H	1
1	W	4	L	V	4

من ذلك نجد أن $S \geq 6$، ولكن S لا يمكن أن يكون 6 أو 7 أو 9 (لأنه لو كان غير ذلك لحصلنا على $W = 0$ أو $W = 1$ أو $W = 3$ وهذه قيم استخدمت سابقًا). إذن، $S = 8$ و $W = 2$. الآن، بما أن جميع القيم 0 إلى 4 قد استخدمت

فإن $V+G \geq 11$. ولكنه لا يوجد حمل من هذا العمود. إذن، $E \neq 4$.

إذا كان $E=5$ فإن:

$$\begin{array}{rcccccc} & & S & 5 & V & 5 & 4 \\ + & & 5 & 0 & G & H & 1 \\ \hline & 1 & W & 5 & L & V & 5 \end{array}$$

عندئذ، $S=7$ أو $S=8$. إذا كان $S=7$ فإن $W=2$. بما أنه لا يوجد حمل من $V+G$ فإن $V<5$ أو $G<5$. وهذا أيضاً صحيح للحرفين V و H (لماذا؟). بما أنه بقي قيمة واحدة فقط وهي 3 فإن $V=3$ ويكون $H=8$ و $G=6$. ولكن هذا مستحيل لأن $6+3$ مع الحمل يؤدي 0 مع الحمل.

ننتقل الآن إلى القيمة التالية للحرف S .

إذا كان $S=8$ فإن $W=3$. وبأسلوب مشابه للفقرة السابقة نحصل على $V=2$ و $H=7$ و $G=6$. عندئذ، $L=9$ ونكون قد حصلنا على الحل:

$$\begin{array}{rcccccc} & & 8 & 5 & 2 & 5 & 4 \\ + & & 5 & 0 & 6 & 7 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 9 & 2 & 5 \end{array}$$

وبالرجوع إلى بداية الحل، نجد أننا لم نجرب القيمة $I=9$. في الحقيقة هذه القيمة تؤدي إلى حل آخر هو:

$$\begin{array}{rcccccc} & & 6 & 3 & 7 & 3 & 2 \\ + & & 3 & 9 & 8 & 4 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

ونترك التفاصيل للقارئ.

(هـ) هذه المسألة لها حلول كثيرة من بينها الحلان:

$$\begin{array}{r} 342 \\ +\ 1350 \\ \hline 1692 \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r} 462 \\ +\ 8450 \\ \hline 8912 \end{array}$$

(ك) يوجد العديد من الحلول من بينها:

$$\begin{array}{r} 173 \\ +\ 295 \\ \hline 468 \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r} 289 \\ +\ 461 \\ \hline 750 \end{array}$$

(م) بالتجريب نجد الحلول التالية:

$$63 \times 154 = 9702$$
$$54 \times 168 = 9072$$
$$59 \times 136 = 8024$$
$$26 \times 345 = 8970$$

(٤٫٣)

يوجد 52 أسبوعاً و 1 يوم في السنة الاعتيادية للتقويم الجريجوري، وتزيد السنة الكبيسة على السنة الاعتيادية بيوم واحد حيث يكون عدد أيام شهر فبراير 29 يوماً. لذا، إذا كان أول يوم من أيام السنة الاعتيادية هو السبت فإن أول يوم من أيام السنة $x+1$ هو الأحد. أما إذا كانت x سنة كبيسة فيكون أول يوم من أيام $x+1$ هو الاثنين. تذكر أيضاً أن السنوات الكبيسة هي التي تقبل القسمة على 4 ما عدا تلك التي تقبل القسمة على 100، وفي هذه الحالة تكون كبيسة إذا قبلت القسمة على 400. على سبيل المثال، 2100 ليست كبيسة ولكن 2000 كبيسة. ومن ناحية أخرى فإن الدورة المكونة من 400 تحتوي على 52×400 أسبوعاً و 497 يوماً. أي أنها تحتوي على 20871 أسبوعاً. ولهذا فإن السنتين x و $400 + x$ تبدأن باليوم نفسه بغض النظر عن كون x سنة عادية أم كبيسة. من ذلك نرى أنه لمعرفة ترددات أيام الأسبوع المختلفة التي تبدأ بها السنوات فإنه يكفي معرفة هذه الترددات لدورة مكونة من 400 سنة. يمكن إنجاز ذلك بكتابة 400 سنة متتالية وإيجاد اليوم

الأول لكل من هذه السنوات، ولكن ذلك ليس أسلوبًا علميًّا. وعوضًا عن ذلك نقسم الدورة إلى فترات ونحسب الترددات في كل فترة.

أولاً، من الواضح أن أي دورة مكونة من 400 سنة تحتوي على سنة واحدة فقط تقبل القسمة على 400 . فإذا استطعنا تجاهل هذه السنة فيكون بالإمكان تقسيم 400 سنة إلى 4 فترات مكونة كل منها من 100 سنة ونحسب تكرارات أيام بداية السنة لأول 100 سنة. وبما أن الفترات الجزئية الثلاث الأخرى تتبع النمط نفسه ما عدا أن كل منها تبدأ بيوم مختلف. فإننا بإعادة تسمية أيام الأسبوع يكون من الممكن حساب ترددات أول أيام السنة في الفترات الجزئية ومن ثم جمع هذه الترددات لنحصل على المطلوب.

يمكن إنجاز ذلك باختيار دورة تقع فيها السنة "الشاذة" في نهاية فترة جزئية ويفضل أن تقع في نهاية الدورة نفسها. على سبيل المثال، الدورة 2001 إلى 2400 ستفي بالغرض. قبل البدء في عملية العد، نفرض أن أيام الأسبوع هي $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ وأن السنة 2001 تبدأ باليوم 1.

ولتبسيط الحسابات أكثر، لاحظ أنه في كل فترة مكونة من 28 سنة والتي لا تحتوي السنة التي تقبل القسمة على 100، نجد أن أول أيام السنة يتكرر 4 مرات لكل يوم من أيام الأسبوع (نترك برهان ذلك للقارئ). إذن، مع بداية العام 2084 كل يوم من أيام الأسبوع وقع في بداية العام $12 = 4 \times 3$ مرة. الآن، نقوم بإيجاد تكرارات أيام الأسبوع في بداية كل من الـ 16 سنة الأخيرة بالعد. وبما أن 2001 و 2085 تبدأن باليوم نفسه نجد أن هذه التكرارات هي :

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 2, 3, 4, 5$$

لاحظ أن الفترة الجزئية التالية المكونة من 100 سنة ستبدأ باليوم 6.

الجدول التالي يلخص لنا البيانات التي حصلنا عليها:

n	1	2	3	4	5	6	7
$A_1(n)$	14	15	14	15	14	14	14

حيث $A_i(n)$ يرمز لعدد المرات التي تكون فيها بداية السنة اليوم n للفترة الجزئية i . وكما أسلفنا فإن الفترة التالية تبدأ باليوم 6 . وبإعادة ترتيب الأيام في الجدول السابق نحصل على:

n	6	7	1	2	3	4
$A_2(n)$	14	15	14	15	14	14

وبالمثل نحصل على الجدولين:

n	4	5	6	7	1	2	3
$A_3(n)$	14	15	14	15	14	14	14

n	2	3	4	5	6	7	1
$A_4(n)$	14	15	14	15	14	14	14

وبإضافة الأعداد المتقابلة لكل من الأيام نحصل على الجدول (١,٤):

n	1	2	3	4	5	6	7
$A_5(n)$	56	58	57	57	57	56	58

جدول رقم (٣,٤)

حيث $A(n)$ هو عدد المرات التي يكون فيها اليوم n بداية سنة في الفترة من 2001 إلى 2400 . الآن، يبقى أن نسمي الأيام المقابلة للأعداد. يمكن عمل ذلك بالرجوع إلى التقويم لنجد أن السنة 2001 تبدأ بيوم الاثنين. ولذا نجد من الجدول (١,٤) أن 6 هو السبت و 7 هو الأحد. وبهذا نخلص إلى أن بداية السنة تقع أكثر في يوم الأحد منها في يوم السبت.

(٤,٥)

الخطوة الأولى للاعب الأول هي وضع مركز الفيشة ليطابق مركز الطاولة. بعد ذلك يقوم اللاعب الأول في كل خطوة بوضع فيشة بحيث تكون متماثلة بالنسبة لمركز الطاولة مع الفيشة التي وضعها اللاعب الثاني. وبهذا تكون الفيش بعد أي خطوة من خطوات اللاعب الأول متماثلة بالنسبة لمركز الطاولة. إن هذا يعني أن لكل خطوة يلعبها اللاعب الثاني سيليها خطوة يلعبها اللاعب الأول ومن ثم فالخطوة الأخيرة سيلعبها اللاعب الأول ويفوز.

(٤,٧)

التقريرين الأول والأخير لثيودور إما أن يكونا صائبين معًا أو خاطئين معًا. وبما أن كلاً من الطلاب صرح بتقرير خاطئ واحد فقط فإن تقريري ثيودور صائبان. وبهذا يكون ثيودور بريئًا.

لنأخذ الآن تقارير ديفيد. في التقرير الثالث يدعي أن ثيودور هو السارق. ولكننا نعلم أن هذا التقرير الخاطئ. إذن، فإن التقريرين الآخرين لديفيد صائبان. أحد هذين التقريرين هو عدم معرفته لمارجريت قبل بداية العام الدراسي. لذا فإن التقرير الذي تدعي فيه مارجريت معرفتها لديفيد من سنوات عديدة خاطئ. وبهذا فإن تقريري مارجريت الآخرين صائبان وأحدهما هو قولها إن جودي هي السارقة.

(٤,٩)

نستنتج من العبارة الأولى أن والدة نود ليست والدة سمير ومن ثم فهما شخصيتان مختلفتان. لذا فإن الاسم الأول لنود ليس سمير. ومن ناحية أخرى نجد من العبارة الرابعة أن بلنكن وسمير شخصان مختلفان. ولهذا يكون اسم عائلة سمير هو وينكن. أيضًا، عمر سمير الآن 12 عامًا لأنه بدأ الصف الأول عندما كان عمره 7 أعوام وهو الآن في بداية الصف السادس.

لا نستطيع من العبارة الأخيرة الاستنتاج بأن بلنكن وسامي شخصان مختلفان. افتراض أن اسم عائلة سامي هو بلنكن متسق مع جميع العبارات الأخرى. ولكن هذا الافتراض لا يكفي لمعرفة عمر سامي نود. لذا فهذه المسألة قابلة للحل فقط إذا كان سامي وبلنكن شخصين مختلفين. وبهذا نجد أن أسماء الكشافة الثلاثة هي:

سمير وينكن وعمره 12، بدر نود وعمره 13، سامي بلنكن وعمره 13.

(٤،١١)

السؤال هنا هو إيجاد عدد مرات استبدال عقرب الدقائق مع عقرب الساعات مع حصولنا على توقيت صائب. على سبيل المثال، إذا كانت الساعة تشير إلى الواحدة فبعد الاستبدال يشير عقرب الساعات إلى 12 وعقرب الدقائق إلى 1 وهذا ليس توقيتًا صائبًا؛ لأن عقرب الساعات يجب أن يزاح قليلاً إلى اليمين عندما يشير عقرب الدقائق إلى 1. لنفرض الآن أن h هو الوقت (وهذا يطابق أيضًا موقع عقرب الساعات). سنفترض أيضًا أن $12:00$ هي الساعة صفر. أيضًا نفرض أن L هو موقع عقرب الدقائق. عندئذ:

$$h = k + \frac{L}{12}$$

حيث:

$$k = 0,1,2,\ldots,11 .$$

بعد استبدال العقربين والحصول على توقيت صائب فيجب أن يكون:

$$L = k' + \frac{h}{12}$$

حيث:

$$k' = 0,1,2,\ldots,11 .$$

بحذف L من المعادلتين نحصل على:

$$h = \frac{114k + 12k'}{143}$$

من ذلك نجد أن عدد المرات هو $12 \times 12 = 144$. ولكن يجب ملاحظة أن بداية الدورة تقابل $k = k' = 0$ ونهاية الدورة تقابل $k = k' = 11$ هما الساعة 12. ولذا فعدد المرات هو 143. نقترح على القارئ عمل جدول لإيجاد h لجميع قيم k و k' ليرى أن القيمة الوحيدة المكررة تحدث عندما يكون $k = k' = 0$ و $k = k' = 11$.

(٤,١٣)

يمكن تغطية رقعة الشطرنج بعد 64 خطوة. لرؤية ذلك، نقوم بتحريك الحصان على الرقعة حتى نصل إلى طريق مسدود.

نفرض أن $a, b, c, \ldots$ هي المربعات التي لم يصل إليها الحصان. نقوم الآن بإضافة هذه المربعات إلى الطريق. نوضح ذلك بمثال واحد، لذا نفرض أننا حصلنا على الشكل التالي:

42	21	54	9	40	19	52	7
55	10	20	20	53	8	39	18
22	43	63	63	30	6	6	51
11	56	60	60	27	17	17	38
32	23	25	25	58	50	50	5
45	12	28	28	61	37	37	16
a	33	47	47	14	4	4	49
1	46	34	34	3	15	15	36

لاحظ أنه تمت تغطية جميع المربعات ما عدا المربع a. كما أن a يقود إلى 57 وأن 63 يقود إلى 56. ولذا إذا استبدلنا متتالية الخطوات بالمتتالية:

$$1, \ldots, 56, 63, \ldots, 57$$

نستطيع إضافة a إلى نهاية الطريق. بعد إعادة الترتيب نحصل على الرقعة:

42	21	54	9	40	19	52	7
55	10	41	20	53	8	39	18
22	43	24	57	30	61	6	51
11	56	31	60	27	58	17	38
32	23	44	25	62	29	50	5
45	12	63	28	59	26	37	16
64	33	2	47	14	35	4	49
1	46	13	34	3	48	15	36

أحياناً نحتاج إلى تبديل المتتالية عدد من المرات قبل التمكن من إضافة مربع جديد إلى الطريق. يمكن للقارئ أن يحاول إيجاد طريق للحصان بحيث ينتهي الحصان في المربع الذي بدأ منه. للمزيد من المعلومات على هذا الموضوع يمكن الرجوع إلى "Mathematical Recreations and Essays, by W.W.Rouse Ball".

(١٥،٤)

عدد طرق الحصول على 50 سنتاً باستخدام الفئات: 1 سنت، 5 سنت، 10 سنت، 25 سنت هو 49 طريقة. ولرؤية ذلك نفرض أن $N_i(k)$ حيث $i = 1, 5, 10, 25$ هو عدد الطرق للحصول على k سنتاً باستخدام فئات قيمها لا تزيد على i. المطلوب هو إيجاد $N_{25}(50)$. من الواضح أن $N_1(k) = 1$ وأن $N_5(5k) = k + 1$. لحساب $N_{25}(50)$ نقسم المسألة إلى ثلاث حالات:

- عدم استخدام فئة 25 سنتاً: في هذه الحالة نحصل على 50 سنتاً باستخدام الفئات 1 سنت و 5 سنت و 10 سنت فقط. أي أن عدد طرق هذه الحالة هو $N_{10}(50)$.
- استخدام قطعة واحدة فقط من فئة 25 سنتاً: في هذه الحالة نحصل على 25 سنتاً باستخدام الفئات 1 سنت و 5 سنت و 10 سنت فقط. أي أن عدد طرق هذه الحالة هو $N_{10}(25)$.

- **استخدام قطعتين من فئة 25 سنتًا: من الواضح أن هناك طريقة واحدة فقط للحصول على 50 سنتًا. إذن، عدد طرق الحصول على 50 سنتًا هو:**

$$N_{25}(50) = N_{10}(50) + N_{10}(25) + 1 \quad (١,٤)$$

نقوم الآن بحساب $N_{10}(50)$ و $N_{10}(25)$. لاحظ أنه للحصول على 50 سنتًا باستخدام فئات 1 سنت و 5 سنتات و 10 سنتات يمكن إنجازه بعدم استخدام 10 سنتات أو استخدام قطعتين من فئة 10 سنتات وهكذا. إذن،

$$\begin{aligned} N_{10}(50) &= N_5(50) + N_5(40) + \cdots + N_5 + 1 \\ &= 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\ &= 36 \end{aligned}$$

أيضًا:

$$\begin{aligned} N_{10}(25) &= N_5(25) + N_5(15) + N_5(5) \\ &= 6 + 4 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

إذن:

$$.\ N_{25}(50) = 36 + 12 + 1 = 49$$

وبالأسلوب نفسه نستطيع حساب $N_{25}(k)$ لأي عدد من الدولارات. على سبيل المثال:

$$N_{25}(100) = N_{10}(100) + N_{10}(75) + N_{10}(50) + N_{10}(25) + 1$$

لاحظ أن الحدود الثلاثة الأخيرة سبق وأن وجدناها، ولذا يكفي فقط إيجاد الحدين الأول والثاني ويمكن إنجاز ذلك بطريقة مشابهة. أيضاً يمكن إيجاد $N_{25}(125)$ وهكذا. من الممكن أيضاً إيجاد صيغة لحساب $N_{25}(50k)$ وهي:

$$N_{25}(50k) = \frac{100k^3 + 135k^2 + 53k + 6}{6}$$

ولكن الحسابات طويلة لذا لن نقدمها هنا. بعد أن حصلنا على هذه الصيغة يمكن الآن إثبات صوابها باستخدام الاستقراء الرياضي. نبرهن صوابها أولاً عند $k = 1$:

$$N_{25}(50) = \frac{100 + 135 + 53 + 6}{6} = 49$$

وهذا هو ما وجدناه سابقًا.

نفرض الآن صواب الصيغة عند k ونثبت صوابها عند $k + 1$ [استخدم المساواة:

$$N_{25}(50(k+1)) = N_{10}(50(k+1)) + N_{10}(50k+25) + N_{25}(50k)$$

لإثبات خطوة الاستقراء].

(٤,١٧)

الجدول التالي سيساعدنا على إيجاد الحل:

$72 = 1 \times 1 \times 72$	$1 + 1 + 72 = 74$
$72 = 1 \times 2 \times 36$	$1 + 2 + 36 = 39$
$72 = 1 \times 3 \times 24$	$1 + 3 + 24 = 28$
$72 = 1 \times 4 \times 18$	$1 + 4 + 18 = 23$
$72 = 1 \times 6 \times 12$	$1 + 6 + 12 = 19$
$72 = 1 \times 8 \times 9$	$1 + 8 + 9 = 18$
$72 = 2 \times 2 \times 18$	$2 + 2 + 18 = 22$
$72 = 2 \times 3 \times 12$	$2 + 3 + 12 = 17$
$72 = 2 \times 4 \times 9$	$2 + 4 + 9 = 15$
$72 = 2 \times 6 \times 6$	$2 + 6 + 6 = 14$
$72 = 3 \times 3 \times 8$	$3 + 3 + 8 = 14$
$72 = 3 \times 4 \times 6$	$3 + 4 + 6 = 13$

يعلم سامي أن حاصل ضرب أعمار الأولاد هو 72 ويعلم أيضًا أن حاصل جمع أعمارهم، لكننا لا نعلم ذلك. نعلم أيضًا استحالة حل هذه المسألة من المعلومات السابقة. في الجدول السابق كتبنا جميع طرق تحليل 72 إلى حاصل ضرب ثلاثة أعداد.

وجدنا أيضًا مجموع هذه الأعداد. الآن، العدد 14 هو الوحيد الذي ظهر كمجموع مرتين. إذا كان رقم المنزل عددًا غير العدد 14 فيكون بإمكان سامي تحديد أعمار الأولاد. إذن، رقم المنزل هو 14. لذا فأعمار الأولاد هي $2,6,6$ أو $3,3,8$. لكن الأب ذكر أيضًا أنه يأمل أن يلعب ولده البكر مع فريق $U.S.C$ لكرة القدم. ومن ذلك نستنتج أن ولده البكر ليس توأمًا. وبهذا يكون أعمار الأولاد هي $3,3,8$.

(١٩,٤)

الحل مشابه لحل المسألة السابقة.

(٢٥,٤)

"اختلف مع تمامًا".

(٢٧,٤)

لاحظ أولاً أن $32118 = 2 \times 3 \times 53 \times 101$. من العبارة الثالثة نعلم أن $C \geq 2$. وبما أن $C < A < 100$ فإن الخيار الوحيد لقيمة A هو $A = 53$. ولكن يوجد عدة خيارات لقيم C و ℓ وهي:

$$C = 2 \quad , \quad \ell = 303$$
$$C = 3 \quad , \quad \ell = 202$$
$$C = 6 \quad , \quad \ell = 101$$

(٢٩,٤)

بعد الساعة 12 مباشرة يبدأ العقربان بالتحرك، وبما أن عقرب الدقائق أسرع من عقرب الساعات فإنهما لن يلتقيان مرة أخرى إلا بعد أن يكمل عقرب الدقائق دورة

كاملة. الآن، يشير عقرب الساعات إلى 1. بعد ذلك يستمرا بالتحرك بحيث يكون عقرب الدقائق متأخرًا عن عقرب الساعات وبعد وقت قصير (قبل أن يكمل عقرب الدقائق دورته الثانية) سيتطابقان. في هذه اللحظة يكون عقرب الدقائق قد أكمل دورة وجزء من الدورة وليكن λ. ومن ناحية أخرى يكون عقرب الساعات قد تحرك فقط الجزء λ من الدورة. بما أن عقرب الدقائق أسرع من عقرب الساعات بـ 12 مرة نجد أن:

$$1+\lambda=12\lambda$$

أي أن $\lambda=\frac{1}{11}$ من الدورة.

وبما أن عقرب الدقائق يحتاج إلى ساعة لإكمال دورة فإنهما يتطابقان بعد

1 ساعة و $\frac{60}{11}$ دقيقة.

(٤,٣١)

لاحظ أن:

$$CRUDE=C\times 10000+RUDE$$

لذا باختصار $RUDE$ من طرفي المعادلة نحصل على:

$$NUDE+NOT+NOR=C\times 10000$$

ولكن الطرف الأيسر من هذه المعادلة أصغر من 1200. إذن، $C=1$

ونحصل على:

$$NUDE+NOT+NOR=10000$$

إذا كان $N\leq 7$ فإن

$$\begin{aligned}NUDE+NOT+NOR &< 800+800+800\\ &=9600\\ &<10000\end{aligned}$$

إذن، $N \geq 8$. ولكن $N = 9$ كبير لأن:

$$\begin{aligned} NUDE + NOT + NOR &> 9000 + 900 + 900 \\ &= 10800 \\ &> 10000 \end{aligned}$$

وبهذا يكون $N = 8$.

من ذلك نحصل على عدد من الحلول من بينها:

$$8350 + 824 + 826 = 10000;$$
$$8251 + 873 + 876 = 10000;$$
$$8213 + 890 + 897 = 10000.$$

(٤,٣٣)

في كل ساعة يكون القاربان $29 = 17 + 12$ ميلاً أقرب. لذا في كل دقيقة يكون القاربان $\frac{29}{60}$ ميلاً أقرب. ولهذا يكون بعدهما عن بعض قبل دقيقة من تصادمهما $\frac{29}{60}$ ميلاً.

(٤,٣٥)

نفرض لغرض السهولة أن لدينا لتر ماء ولتر من المحلول الحمضي. ولنفرض أيضًا أن الوعاء A يحتوي الماء وأن الوعاء B يحتوي المحلول الحمضي. بعد عملية نقل السائلين بين الوعائيين A و B تكون كمية السائل في كل منهما تساوي لترًا. لنفرض أن r هي كمية الماء في الوعاء B . عندئذ، كمية المحلول الحمضي في الوعاء B هي $1 - r$. بما أن الوعاء B كان في الأصل يحتوي على 1 لتر من المحلول الحمضي فإن الوعاء A يحتوي على $1 - (1 - r) = r$ من المحلول الحمضي. لذا فإن كمية المحلول الحمضي في الوعاءين متساوية وتساوي كل منهما r .

(٤,٣٧)

*لنفرض أن P هو التقرير "التقرير المكتوب على الجهة الأخرى من هذه الصفحة هو تقرير خاطئ".

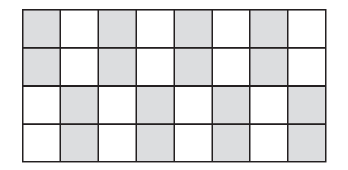
التقرير P تناقض (أي أنه صائب وخاطئ معًا). إذا كان P صائبًا فإن التقرير المكتوب على الجهة الأخرى من الورقة (وهو P أيضًا) تقرير خاطئ. أما إذا كان P خاطئًا فإن التقرير المكتوب على الجهة الأخرى من الورقة (وهو P أيضًا) تقرير صائب. إذن، P تناقض.

(٤,٣٩)

افتراض أن العلماء كانوا صادقين سابقًا وصادقين الآن هو افتراض خاطئ. لذا يمكن استنتاج صواب أي شيء من فرضية خاطئة.

(٤,٤١)

لون الرقعة على النحو التالي:



إذا استطاع الحصان الوصول إلى جميع مربعات الرقعة مرة واحدة فقط والرجوع إلى المربع الذي انطلق منه فإنه يستطيع إنجاز ذلك مهما كان المربع الذي انطلق منه.

لنفرض أن المربع الذي انطلق منه الحصان هو مربع الركن الأيسر السفلي. هذا المربع لونه أبيض. يستطيع الحصان الوصول إلى مربعين فقط من هذا المكان، لذا

* المترجمان: الحل الموجود في النسخة الإنجليزية هو حل لمسألة مختلفة. ولذا فإن هذا الحل مقدم من قبل المترجمين.

لكي يكمل رحلته ويعود إلى المربع الذي انطلق منه فيجب أن يستخدم أحد هذين المربعين. وأيضاً نحتاج للمربع الآخر للانطلاق. لاحظ أن لون هذين المربعين هو الأبيض، لذا فالحركة الأولى والحركة الأخيرة للحصان يجب أن يكونا إلى مربع أبيض ومن مربع أبيض. أيضاً، يحتاج الحصان إلى زيارة جميع المربعات ذوات اللون الأسود مرة واحدة فقط. ومع ملاحظة أنه يمكن للحصان الانتقال من مربع أبيض إلى مربع أسود أو العكس هو فقط من صفي الوسط. لأنه عدا ذلك لا يمكن أن يغير الحصان لوني المربعين. وبما أن الحركة الأولى والحركة الأخيرة من مربع أبيض فإن المربع الأول والمربع الأخير الذي سيتحرك عليهما الحصان يجب أن يكونا من صفي الوسط.

عدد المربعات ذوات اللون الأسود في الصفين العلوي والسفلي هو 8 . في كل مرة يكون الحصان على أحد هذه المربعات فإنه يجب أن ينتقل إلى مربع أسود من صفي الوسط. لذا لكي يتمكن الحصان من زيارة جميع المربعات ذوات اللون الأسود في الصفين العلوي والسفلي نحتاج إلى 9 مربعات من اللون الأسود في صفي الوسط: مربع للانطلاق ومربع بعد كل زيارة لمربع من المربعات الثمانية في الصفين العلوي والسفلي. ولكن عدد المربعات ذوات اللون الأسود في صفي الوسط هو 8 . إذن، إجابة عن هذا السؤال هي :"لا يمكن إنجاز مثل هذه الرحلة".

لاحظ أنه من الممكن زيارة جميع المربعات مرة واحدة فقط ونترك برهان ذلك للقارئ مع الانتباه إلى أن موقع مربع البداية في هذه الحالة مهماً.

(٤٫٤٣)

السؤال الذي يمكن طرحه على السيدة "هل أنت سيدة ؟". إذا كانت إجابتها بتحريك رأسها إلى اليمين واليسار فإنها تكون إحدى أفراد القبيلة. أما أي حركة أخرى من رأسها فنفهم منها أنها ليست من أفراد القبيلة.

(٤٧.٤)

نحتاج إلى بعض الترميزات لحل هذه المسألة. لنفرض أن اللاعبين هم A ، B ، C ، D وأن $P(X) = P($احتمال حصول X على مجموعة ياربورو$)$ واحتمال حصول كل من X و Y على مجموعة ياربورو$P(X,Y) = P($ $)$.

نفرض أيضاً أن P هو احتمال حصول لاعب واحد على الأقل مجموعة ياربورو. من الممكن الاستنتاج أن:

$$P = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$

لكن هذه الصيغة ليست صحيحة وتحتاج إلى بعض التعديلات. لاحظ أننا حسبنا $P(A,B)$ في الطرف الأيمن مرتين، مرة عند حساب $P(A)$ والأخرى عند حساب $P(B)$. وهذا صحيح أيضاً للبقية. لذا فلتصحيح الصيغة أعلاه فيجب أن نطرح جميع التركيبات $P(X,Y)$ مرة واحدة. لذا نحصل على الصيغة:

$$P = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A,B) - \cdots - P(C,D)$$

وهذه هي الصيغة الصحيحة لأنه لا يمكن أن يحصل أكثر من لاعبين معاً على مجموعة ياربورو. لاحظ أيضاً أن جميع $P(X)$ متساوية وجميع التركيبات المختلفة $P(X,Y)$ متساوية. إذن، $P = 4P(A) - 6P(A,B)$.

الآن، عدد طرق الحصول على مجموعة ياربورو هو:

$$\binom{36}{13}$$

وعدد الحصول على مجموعة مكونة من 13 ورقة من مجموعة ورق اللعب الكلية هو:

$$\binom{52}{13}$$

إذن:

$$P(A)=\frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}}$$

إذا حصل A على مجموعة ياربورو فإنه يوجد:

$$\binom{23}{13}$$

مجموعة ياربورو من:

$$\binom{39}{13}$$

للاعب B . إذن،

$$P(A,B)=\frac{\binom{36}{13}\binom{23}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$P=4\frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}}-6\frac{\binom{36}{13}\binom{23}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}}\approx 0.0145528$$

(٤٩،٤)

سنجيب بداية عن السؤال الأخير. لكي تكسب 40 دولارًا فأكثر يجب أن تكون الخانات الثلاث الأولى أو الخانات الثلاث الأخيرة على الأقل هي الخانات الثلاث الأولى أو الأخيرة من العدد 987654 . عدد الأعداد التي على الصورة $654\times\times\times$ هو 1000 وعدد الأعداد التي على الصورة $\times\times\times 987$ هو أيضًا 1000 . بما أنه تم حساب

العدد 987654 مرتين وهو العدد الوحيد الذي تم حسابه مرتين فإن عدد الأعداد التي تكون على إحدى الصورتين هو:

$$1000 + 1000 - 1 = 1999$$

إذن، فرصة أن يكون العدد الرابح هو أحد هذه الأعداد هي: 1999 إلى 900000 .

وبالأسلوب نفسه يمكن حساب فرصة ربح 200 دولار أو أكثر، 2000 دولار أو أكثر وهكذا. هذه الفرص هي:

فرصة ربح 50000 دولار فأكثر هي 1 إلى 900000 .

فرصة ربح 2000 دولار فأكثر هي 19 إلى 900000 .

فرصة ربح 200 دولار فأكثر هي 199 إلى 900000 .

فرصة ربح 40 دولار فأكثر هي 1999 إلى 900000 .

يمكن أيضًا حساب فرص ربح جائزة واحدة فقط. فمثلاً، لحساب فرصة ربح 40 دولار بالضبط يجب أن نستثني فرص ربح 200 دولار فأكثر. أي $1800 = 199 - 1999$ إلى 900000 هي فرص ربح 40 دولار بالضبط. وبالمثل نحصل على بقية بيانات الجدول التالي:

فرصة ربح 50000 دولار هي 1 إلى 900000 .

فرصة ربح 2000 دولار هي 18 إلى 900000 .

فرصة ربح 200 دولار هي 180 إلى 900000 .

فرصة ربح 40 دولار هي 1800 إلى 900000 .

بمقارنة الصفين الأول والثاني من الجدول السابق نجد أن فرص الربح في الصف الثاني أفضل 18 مرة عنها في الصف الأول ولكن ما يدفع هو أقل 25 مرة، وليس 18 مرة لو كان الدفع عادلاً. الدفع في الصفين الثاني والثالث عادل. لاحظ أيضًا أن جميع الدفعات غير عادلة مقارنة بفرص الربح.

الرياضيات المسلية
Recreational Math

(١.٥)

مجموع مربعات الأعداد من 1 إلى 27 هو $2310 \times 3 = 6930$. لذا فإن مجموع كل من المجموعات الجزئية المطلوب هو 2310 . أحد الحلول الذي حصلنا عليه باستخدام الحاسب الآلي هو:

$$2310 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$
$$+9^2 + 10^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 + 19^2 + 23^2$$
$$2310 = 12^2 + 17^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2$$
$$2310 = 16^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 27^2$$

(٣.٥)

إحدى الإستراتيجيات الممكنة هي حمل أكبر عدد من الجالونات على خمس مراحل بحيث يقطع في كل مرحلة 100 ميل. لاحظ أن الجيب يستطيع تنفيذ المرحلة الأولى والعودة إلى نقطة الانطلاق من دون الحاجة إلى تعبئة خزان الوقود. إذن، لكل مرحلة يحتاج الجيب إلى 4 عبوات من الوقود لكي يوصل 3 عبوات (العبوة الرابعة يستخدمها لخزان الوقود). يتم نقل كمية الوقود إلى المرحلة الأولى. لاحظ أن خزان الوقود يحتوي على نصف سعته من الوقود عند هذه النقطة. املأ خزان الوقود (إحدى العبوات ستحتوي على 5 جالونات من الوقود). كرر ذلك للمراحل 2 ، 3 ، 4 ، 5 . يمكن حساب عدد جالونات الوقود التي نحتاجها لنقل 100 جالون في المرحلة الأخيرة: بداية نحتاج إلى 430 جالونًا (بافتراض أن خزان الوقود فارغ في البداية، أما إذا كان معبئًا فإننا نحتاج إلى 420 جالونًا)، 320 بعد المرحلة الأولى،

235 بعد المرحلة الثانية، 180 بعد المرحلة الثالثة، 135 بعد المرحلة الرابعة، 100 بعد المرحلة الخامسة.

(٩،٥)

الإجابة هي "نعم": أنشئ أي مربع سحري من النوع 3×3. أضرب كل عدد من أعداده بالعدد 2 واطرح 1 من الناتج. المربع الذي نحصل عليه سحري أعداده هي أول 9 أعداد فردية.

(١١،٥)

الإجابة هي "نعم": لنفرض أن $a+1, a+2, \ldots, a+9$ أعداد صحيحة متتالية. خذ أي مربع سحري من النوع 3×3 ثم أضف a إلى كل من أعداده. عندئذ، نحصل على مربع سحري أعداده هي المتتالية $a+1, a+2, \ldots, a+9$.

(١٣،٥)

ضع 4 حبات لؤلؤ في كل كفة. إحدى الكفات الثلاث ستكون أثقل أو أخف من الكفتين الأخريين. لذا فهي تحتوي على حبة اللؤلؤ المختلفة. الآن، قم بمقارنة ثلاث حبات من حبات هذه الكفة وأبقي الحبة الرابعة في يدك. إذا اختلفت إحدى الكفات الثلاث فإنها تحتوي الحبة المختلفة، أما إذا تساوت الكفات الثلاث فتكون الحبة المختلفة هي التي في يدك.

نفرض الآن أن عدد حبات اللؤلؤ هو 15. في هذه الحالة أيضاً ضع 4 حبات في كل كفة. إذا تساوت الثلاث كفات فالحبة المختلفة هي من بين الثلاث حبات الباقية التي يمكن مقارنتها بوضع حبة واحدة في كل كفة لمعرفة المختلفة منها. أما إذا اختلفت الكفات الثلاث فأعد خطوات الحل عندما يكون عدد الحبات هو 12.

(١٥،٥)

$$\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} b & a \\ a & b \end{matrix}$$

هما المربعان اللاتينيان الوحيدان من النوع 2×2. عدد المربعات اللاتينية المختلفة من النوع 3×3 هو 12 وهي جميع المربعات التي نحصل عليها من تبديلات المجموعة $\{a,b,c\}$. لنفرض (دون المساس بالعمومية) أن الصف الأول من المربع هو $a \quad b \quad c$. عندئذ، يوجد خياران لموقع a في الصف الثاني. بعد تحديد موقع a يوجد خيار واحد فقط لموقعي b و c. لذا نحصل على المربعين:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix}$$

من ذلك يوجد مربعان فقط لكل تبديل. وبما أن عدد التبديلات هو 6 فإن عدد المربعات هو 12.

يمكن إيجاد حدّ أعلى لعدد المربعات اللاتينية من النوع 8×8 كالتالي: عدد ترتيبات الصف الأول هو $8!$ (عدد تبديلات 8 عناصر). لكل من هذه التبديلات يوجد $7!$ ترتيبات للعمود الأول (تبديلات 7 عناصر لأنه تمَّ تحديد العنصر في الصف العلوي الأيسر). بعد ذلك عدد ترتيبات الصف الثاني هو $7!$. ومن ثم عدد ترتيبات العمود الثاني هو $6!$ وهكذا. ولذا فإن الحد الأعلى لعدد المربعات اللاتينية من النوع 8×8 هو:

$$8!7!7!6!6!5!5!4!4!3!3!2!2! = 634153008009974906688 \times 10^7$$

هذا الحد ليس دقيقًا، في الحقيقة عدد المربعات اللاتينية من النوع 8×8 أصغر من ذلك بكثير وهو العدد 108776032459082956800 ولكن برهان ذلك صعب جدًّا.

يمكن إيجاد حد أدنى على النحو التالي:

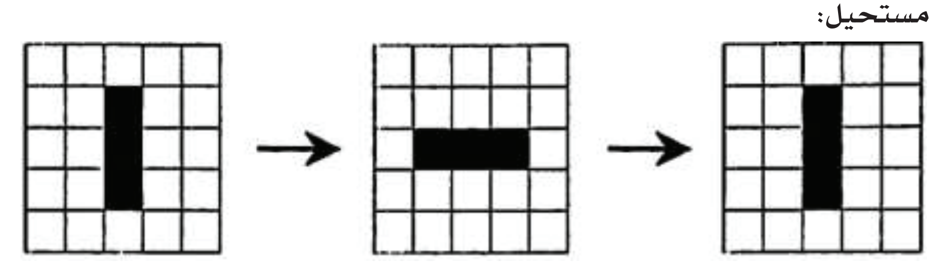
لنفرض أن a,b,c,d,e,f,g,h هي عناصر صف من الصفوف. عدد ترتيبات الصف الأول هو $8!$ (تبديلات 8 عناصر). سنجد الآن عدد ترتيبات الصف الثاني لكل ترتيب من ترتيبات الصف الأول. عدد طرق وضع a في الصف الثاني هو 7 (جميع المواقع ما عدا a في الصف الأول)، لكل موقع من مواقع a يوجد 6 مواقع على الأقل لوضع b (جميع المواقع باستثناء موقع a وموقع b في الصف الأول). لاحظ أنه إذا كان موقع a في الصف الثاني هو موقع b في العمود الأول فإنه توجد 7 خيارات لوضع b في الصف الثاني. لذا فإن 6 هو حد أدنى. بعد ذلك يوجد 5 طرق على الأقل لوضع c في الصف الثاني وهكذا. ومن ذلك نرى أنه لكل ترتيب من ترتيبات الصف الأول يوجد $7!$ طريقة لترتيب عناصر الصف الثاني. وبصورة مشابهة نجد للصفوف من 3 إلى 8 أن عدد ترتيبات الصف الثالث هو $6!$ على الأقل وعدد ترتيبات الصف الرابع هو $5!$ على الأقل وهكذا. إذن، عدد الترتيبات الكلية (عدد المربعات اللاتينية من النوع 8×8) هو على الأقل:

$$8!7!6!5!4!3!2! = 5056584744960000$$

للاطلاع على المزيد من المربعات اللاتينية انظر: [BAL, p.189 ff].

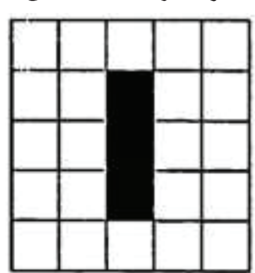
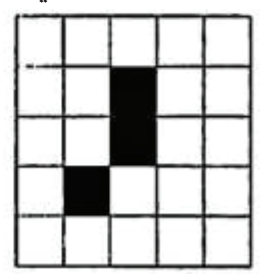
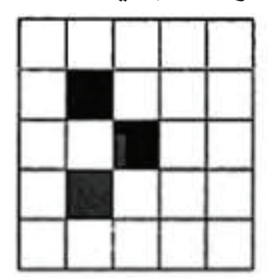
(١٧.٥)

الشكل التالي يولِّد دورة سكانية مالم يكون عدد السكان غير منته وهذا مستحيل:

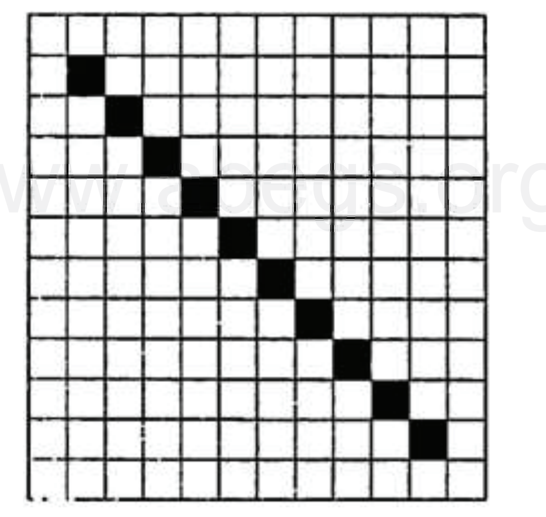


إذا وجد مربع واحد أو مربعان فقط فإن الأفراد سيموتون. إذا وجد ثلاثة مربعات

فأكثر فمن السهل أن نرى أنه في حالة وجود ثلاثة جيران للفرد ستحصل ولادة جديدة. ولذا لكي نحصل على شكل ثابت (لا يتغير) فإنه يجب أن يكون عدد جيران الفرد الواحد 2 على الأكثر. ولكن الشكل التالي ينتج عنه ولادات جديدة:

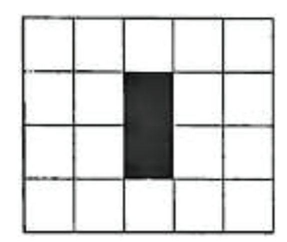




لذا فإن الخيار الوحيد هو أن يكون ترتيب المربعات قطريًّا:



وبهذا فإن أحد السكان سيموت في النهاية من الوحدة (إلا إذا كان القطر غير منته وهذا لن يحصل إلا إذا كان عدد السكان غير منته).

الشكل التالي يؤدي إلى وفاة مباشرة:



يوجد بعض الأشكال التي تنمو بلا حدود. أحد هذه الأشكال اكتشفه جوسبر (Gosper) عام 1970 ويدعى "Glider Gun" وهو:



يمكن للقارئ التحقق من الحصول على طلقة جديدة من البندقية كل 30 جيل (أعلى الشكل) باتجاه الجنوب الشرقي. المزيد من ألعاب الحياة وألعاب أخرى نجدها في كتاب:

Winning Ways, by Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway and Richard K. Guy

(١٩.٥)

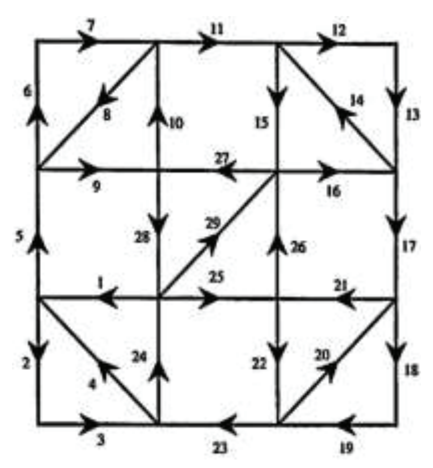
أنقل الماعز إلى الضفة الأخرى ثم ارجع وأنقل الثعلب إلى الضفة الأخرى وأرجع الماعز إلى الضفة الأولى. الآن، أنقل الملفوف إلى الضفة الأخرى واتركها مع الثعلب. وأخيراً، عد إلى الضفة الأولى وأنقل الماعز إلى الضفة الأخرى وتكون قد أنجزت المهمة.

(٥.٢١)

أكبر عدد هو وضع 16 ملكًا: لاحظ أن أكبر عدد من الملوك التي يمكن وضعها في أي صف هو 4 . إذا وضعنا 4 ملوك في صف فإن الصف المجاور يجب أن يكون فارغًا وإذا وضعنا 3 ملوك في صف فإننا نستطيع وضع ملك واحد فقط في الصف المجاور. إذن، العدد الأكبر هو 16، والشكل التالي مثال على ذلك:

(٥.٢٣)

لاحظ أن جميع الرؤوس واقعة على عدد زوجي من الأضلاع عدا رأسي المركز حيث عدد الأضلاع الواقعة على كل منهما يساوي 5 . لذا يجب أن نبدأ من أحد هذين الرأسين وننتهي بالآخر. الشكل التالي يبين إحدى الطرق لإنجاز ذلك حيث أرقمنا المتتالية.



(٢٥.٥)

الخطوة الأولى: املأ الوعاء الذي سعته 5 أونصات والوعاء الذي سعته 11 أونصة. عندئذ، يبقى $8 = (5+11) - 24$ أونصات في الوعاء الأصلي.

الخطوة الثانية: أفرغ السائل من الوعاء الذي سعته 5 أونصات إلى الوعاء الذي سعته 13 أونصة. أكمل تعبئة الوعاء الذي سعته 13 من سائل الوعاء الذي سعته 11. عندئذ، يبقى $3 = (13-5) - 11$ أونصة في الوعاء الذي سعته 11 أونصة.

الخطوة الثالثة: املأ الوعاء الذي سعته 5 أونصات من الوعاء الذي سعته 13 أونصة ثم أفرغ الوعاء الذي سعته 5 أونصات في الوعاء الذي سعته 11 أونصة. الآن، لدينا 8 أونصات في الوعاء الأصلي و 8 أونصات في الوعاء الذي سعته 11 أونصة و 8 أونصات في الوعاء الذي سعته 13 أونصة.

(٢٥.٥)

لنفرض أن a_{ij} حيث $1 \le i \le k$ و $1 \le j \le m$ هي عناصر المصفوفة وأن r_i هو حاصل ضرب أعداد الصف i و c_j هو حاصل ضرب أعداد العمود c_j. أي أن:

$$\begin{aligned} r_i &= a_{i1}a_{i2}\ldots a_{im} \\ c_j &= a_{1j}a_{2j}\ldots a_{kj} \end{aligned}$$

عندئذ، نجد أن:

$$\begin{aligned} & c_1c_2\cdots c_m r_1 r_2\cdots r_k \\ &= (a_{11}a_{21}\cdots a_{k1})(a_{12}a_{22}\cdots a_{k2})\cdots(a_{1m}a_{2m}\cdots a_{km}) \\ &\qquad \cdot(a_{11}a_{12}\cdots a_{1m})(a_{21}a_{22}\cdots a_{2m})\cdots(a_{k1}a_{k2}\cdots a_{km}) \\ &= \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = 1 \end{aligned}$$

من ذلك نرى أنه لكي يكون $r_i = c_j = -1$ لكل i و j فإن $k+m$ يجب أن يكون عددًا زوجيًا. لذا لا توجد مصفوفات تحقق الشرط عندما يكون $k+m$ عددًا فرديًا.

لنفرض إذن، أن $k+m$ زوجي. لاحظ أولاً أن عدد خيارات كل من الصفوف هو 2^m (يوجد خياران لكل عنصر وعدد العناصر هو m). كم عدد هذه الخيارات التي يكون فيها $r_i=-1$؟ الإجابة هي "نصف هذه الخيارات" (لكل تركيبة أعداد حيث $r_i=1$ يوجد تركيبة أخرى بحيث يكون $r_i=-1$ وذلك بضرب كل من أعداد التركيبة الأولى بالعدد -1. إذن، يوجد تقابل بين التركيبات التي تجعل $r_i=1$ والتركيبات التي تجعل $r_i=-1$). وبهذا فإن عدد الخيارات التي يكون فيها $r_i=1$ هو $2^{m-1}=\frac{2^m}{2}$. الآن، نقوم بكتابة عناصر أول $k-1$ من الصفوف عشوائيًّا لنحصل على عدد من الطرق يساوي $(2^{m-1})^{k-1}$. عندئذ، يوجد خيار واحد فقط لعناصر الصف الأخير لأننا نريد $c_j=-1$ لكل j. لذا يكون لدينا $c_j=-1$ لكل $j=1,2,\ldots,m$ و $r_i=-1$ لكل $i=1,2,\ldots,k-1$. يبقى علينا التحقق من أن $r_k=-1$. لكن من الصيغة التي حصلنا عليها سابقًا وملاحظة أن $k+m-1$ فردي عندما يكون $k+m$ زوجياً نجد أن:

$$\begin{aligned} c_1c_2\cdots c_k r_1 r_2\cdots r_m &= (-1)^{k+m-1} r_k \\ &= -r_k \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن، $r_k=-1$. وبالتالي يكون عدد المصفوفات من الشكل $k\times m$ التي تحقق الشروط المطلوب هو $2^{(k-1)(m-1)}$ عندما يكون $k+m$ زوجيًّا و 0 عندما يكون $k+m$ فرديًّا.

الجبر والتحليـــــل
Algebra and Analysis

(١,٦)

لاحظ أن:

$$\begin{aligned}&(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\\&=1-a-b-c-d+ab+ac+ad+bc+bd+cd\\&-abc-abd-acd-bcd+abcd\\&=1-a-b-c-d+ab(1-c)+bc(1-d)\\&+cd(1-a)+ad(1-b)+ac+bd+abcd\\&\geq 1-a-b-c-d,\end{aligned}$$

وبما أن $0\leq a,b,c,d\leq 1$ فإن:

$$ab(1-c)+bc(1-d)+cd(1-a)+ad(1-b)+ac+bd+abcd\geq 0$$

(٢,٦)

لنفرض أن:

$$M=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

حيث $n>1$. ليكن k أكبر عدد صحيح يحقق $2^k\leq n$. لاحظ أن $k\geq 1$. من تعريف k نجد أن:

$$2^k\leq n<2^{k+1}$$

الآن، جميع الأعداد $2^k, 2^k+1, 2^k+2, \ldots, n$ لا تقبل القسمة على 2^k (إذا كان أحدها يقبل القسمة على 2^k فإنه يجب أن يكون على الصورة $l\times 2^k$ حيث

$2 \geq l$. عندئذ، نجد أن $n \geq 2 \times 2^k$ وهذا يناقض اختيار k). إذن، يوجد مقام واحد فقط من مقامات الطرف الأيمن للعدد:

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

يقبل القسمة على 2^k. لنفرض أن D هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد $1, 2, 3, \ldots, n$. الآن، يقبل D القسمة على 2^k ولكنه لا يقبل القسمة على 2^{k+1}. ومن ذلك نجد أن:

$$\begin{aligned} M &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= \frac{D + D/2 + D/3 + \cdots + D/2^k + \cdots + D/n}{D} \end{aligned}$$

الآن، كل حد من حدود البسط هو عدد زوجي ما عدا الحد $D / 2^k$ فهو عدد فردي. وبهذا فإن البسط يجب أن يكون عدداً فردياً (مجموع أعداد زوجية وعدد فردي). ولكن المقام عدد زوجي (لأن D يقبل القسمة على 2^k). وبما أن خارج قسمة عدد فردي على عدد زوجي لا يمكن أن يكون عددًا صحيحًا فإننا نجد أن M لا يمكن أن يكون عددًا صحيحًا.

(٦.٥)

باستخدام مبرهنة ذات الحدين نحصل على:

$$\begin{aligned} &11^{10} - 1 \\ &= (10 + 1)^{10} - 1 \end{aligned}$$

$$= \left[\binom{10}{0}10^{10} + \binom{10}{1}10^{9} + \cdots + \binom{10}{8}\times 100 + \binom{10}{9}\times 10 + 1\right] - 1$$

$$= \left[\binom{10}{0}10^{10} + \binom{10}{1}10^{9} + \cdots + \binom{10}{8}\times 100 + 10\times 10\right]$$

$$= 100\left[\binom{10}{0}10^{8} + \binom{10}{1}10^{7} + \cdots + \binom{10}{8} + 1\right]$$

(٦,٧)

باستخدام آلة حاسبة نجد أن

$$\left(\frac{99}{101}\right)^{50} + \left(\frac{100}{101}\right)^{50} < 1 = \left(\frac{101}{101}\right)^{50}.$$

وبما أن:

$$\left(\frac{99}{101}\right)^{N} \le \left(\frac{99}{101}\right)^{50}$$

وأن:

$$\left(\frac{100}{101}\right)^{N} \le \left(\frac{100}{101}\right)^{50}$$ لكل $N \ge 50$،

نجد أن:

$$\left(\frac{99}{101}\right)^{N} + \left(\frac{100}{101}\right)^{N} < 1 = \left(\frac{101}{101}\right)^{N}$$

وبالضرب في العدد 101^N نحصل على $99^N + 100^N < 101^N$.

وعلى وجه الخصوص، المتباينة صائبة لكل $N \ge 1000$.

(٦,٩)

يمكن عدها على النحو التالي:

عدد 1 لكل 10 أعداد في مراتب الآحاد

10 أعداد لكل 100 عدد في مراتب العشرات

$\vdots$

10^6 عدد لكل 10^7 عدد في مراتب المليون.

إذن، العدد الكلي هو:

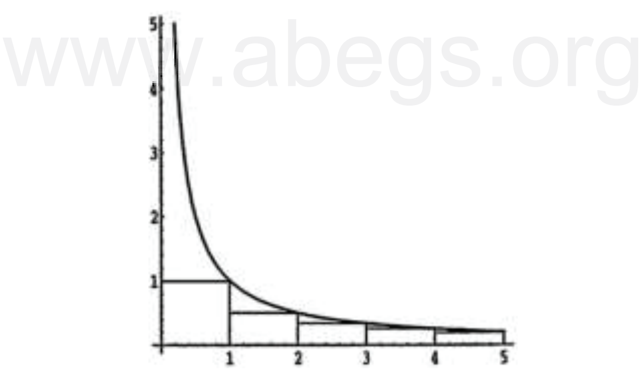
$$10^7 + 10^7 + \cdots + 10^7 = 7 \times 10^7$$

(١١.٦)

لاحظ أن $\ln(n)$ هو مساحة المنطقة المحدودة ببيان الدالة $y = \frac{1}{x}$ من $x = 1$ إلى $x = n$. عندئذ، يكون المجموع

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

هو مساحة المستطيلات المبينة في الشكل:



يمكن تقريب المجموع

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

ليكون 1 مطروحًا منه مجموع مساحات المناطق بين كل مستطيل والمنحنى في الشكل الموضح. هذه المنطقة هي تقريبًا مثلث.

مساحة المثلث k (أي المثلث أعلى المستطيل ذو الارتفاع $\frac{1}{k+1}$) هي:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

وبالجمع من 1 إلى n نحصل على مجموع متناوب يساوي :

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

إذن، قيمة المجموع:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$$

تساوي تقريبًا:

$$1-\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n+1)}<4\,.$$

يمكن تقريب مجموع مساحات المناطق بين كل من المستطيلات والمنحنى هندسيًّا بإزاحة جميع هذه المناطق أفقياً إلى المربع الأول (أي المربع الذي أحد رؤوسه (0,0)). عندئذ، تكون المناطق منفصلة ومحتواه في مربع مساحته تساوي 1.

وبهذا، يكون مجموع مساحات هذه المناطق أصغر من 1.

(١٣،٦)

لنفرض أن S_n هو المجموع الجزئي من 1 إلى n للمتسلسلة التوافقية.

عندئذ، استناداً إلى التمرين (١١) نجد أن $S_n \approx ln(n)$. لاحظ أن مجموع أعداد S_n التي تحتوي مقاماتها على العدد 7 هي تقريبًا $\ln\left(\frac{n}{10}\right)$. إذن، S_n مطروحًا منه مجموع هذه الأعداد يساوي تقريبًا:

$$\ln(n)-\ln\left(\frac{n}{10}\right)=\ln\left(\frac{n}{n/10}\right)=\ln 10<\infty$$

ونترك التفاصيل للقارئ.

(١٥,٦)

لاحظ أن $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$. وبما أن p عدد أولي فإنه لا يقبل القسمة على 3 . إذن، $p+1$ أو $p-1$ يقبل القسمة على 3 . وبهذا فإن $(p+1)(p-1)$ يقبل القسمة على 3 . أيضًا، لا يقبل p القسمة على 2 . إذن، كل من $p+1$ و $p-1$ يقبل القسمة على 2 . أي أن $(p+1)(p-1)$ يقبل القسمة على 4 . إذن، 12 يقسم $p^2 - 1$. أي أن باقي قسمة p^2 على العدد 12 يساوي 1 .

(١٧,٦)

الإجابة هي 8 : إحدى الطرق لإثبات ذلك هو كتابة* $2^{43} = (1000+24)^4 \times 8$ ومن ثم إيجاد هذا العدد.

(١٩,٦)

يمكن حل هذه المسألة على النحو التالي:

$$S_k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k$$
$$rS_k = ar + ar^2 + \cdots + ar^k + ar^{k+1}$$

بطرح المعادلتين نحصل على

$$S_k(1-r) = a(1-r^{k+1})$$

إذن،

$$S_k = \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$$

---

* المترجمان: طريقة أخرى لإيجاد مرتبة آحاد العدد هي ملاحظة أن مراتب آحاد:

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \ldots$$

هي: $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, \ldots$

أي أن هذه المراتب دورية طول دورتها 4 . إذن، مرتبة آحاد 2^{40} هي مرتبة آحاد 2^4 وهي 6 . لذا فإن مرتبة آحاد 2^{43} هي حاصل ضرب مرتبة آحاد 2^{40} ومرتبة آحاد 2^3 . أي، مرتبة آحاد $6 \times 8 = 48$ وهي 8 .

(٢١,٦)

مساحة الكرة التي نصف قطرها r هي $4\pi r^2$ وحجمها هو $\frac{4}{3}\pi r^3$. إذن،

$$4\pi r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

من ذلك نجد أن $r = 3$ وأن مساحتها (حجمها) هو 36π.

(٢٣,٦)

لاحظ أن $\left(10^{\frac{1}{10}}\right)^{30} = 10^3$ وأن $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{30} = 2^{10}$. الآن،

$$2^{10} = 1028 > 1000 = 10^3$$

إذن، $2^{\frac{1}{3}}$ أكبر من $10^{\frac{1}{10}}$.

(٢٥,٦)

بضرب طرفي المعادلة بالعدد 2 نجد أن:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) \\ &\quad +(d^2 - 2da + a^2) \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 \end{aligned}$$

إذن، كل من حدود المساواة الأخيرة يساوي صفراً. من ذلك نجد أن $a = b = c = d = 0$.

(٢٧,٦)

لنفرض أن n عدد صحيح موجب وأن a و b هما خانتا آحاد وعشرات n.

عندئذ، $n = 100T + 10a + b$ حيث T عدد صحيح. من ذلك نجد أن $n^2 = 100L + 2ab \times 10 + b^2$ حيث L عدد صحيح. إذن، خانتا آحاد وعشرات n^2

هما خانتا آحاد وعشرات $2ab \times 10 + b^2$. الآن، بفرض أن جميع خانات n^2 هي 1 فإن خانتي آحاد وعشرات $2ab \times 10 + b^2$ تساوي كل منهما 1 . من ذلك نجد أن $b = 1$ أو $b = 9$.

إذا كان $b = 1$ فإن خانة العشرات يجب أن تكون خانة آحاد $2a$ وهي خانة زوجية لا يمكن أن تساوي 1 .

إذا كان $b = 9$ فإن خانة العشرات هي خانة آحاد $2a + 8$ (حصلنا على العدد 8 من ضرب 9×9)، وهذه أيضاً خانة زوجية ولا يمكن أن تكون 1 . من ذلك نخلص إلى عدم وجود مربع جميع خاناته تساوي 1 .

(٦.٢٩)

لتكن A مجموعة حاصل ضرب جميع أزواج الأعداد الأولية المختلفة. أي أن $A = \{pq : p$ و q عددان أوليان مختلفان$\}$. الآن، إذا كانت S أي مجموعة أعداد أولية فإن A تحتوي جميع حواصل ضرب أزواج S وأن متممة A تحتوي جميع حواصل ضرب ثلاثيات S (لاحظ أن التمرين ينص على "على الأقل عنصران من S").

(٦.٣١)

الإجابة هي "نعم". لنفرض لغرض التناقض أن α^β عدد غير كسري لجميع الأعداد غير الكسرية α و β . الآن، $\sqrt{2}$ عدد غير كسري. إذن، $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ عدد غير كسري. ولكن:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\,2} = 2$$

عدد كسري. ومن ذلك نحصل على التناقض المنشود.

(٦.٣٣)

لدينا:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = a$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + a$$

بما أن θ زاوية حادة فإن $\sin\theta + \cos\theta \geq 0$ وأن $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{1+a}$.

(٦,٣٥)

بما أن:

$$2 = x^{(x^{(x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}})})}$$

فإن $x^2 = x^{(x^{(x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}})})} = 2$. إذن $x = \sqrt{2}$.

(٦,٣٧)

لنفرض أن L هو موقع عقرب الدقائق مقاساً بالدقيقة حيث $0 \leq L \leq 60$ ولنفرض أن l هو موقع عقرب الساعات مقاساً بالساعة حيث $0 \leq l \leq 12$ (فمثلاً، عند الساعة الثالثة يكون $L = 0$ و $l = 3$). من ذلك نجد أن:

$$k + \frac{L}{60} = l$$

حيث $k = 0,1,2,\ldots,11$.

الآن، يلتقي العقربان عندما يكون $L = 5l$. أي عندما يكون:

$$k + \frac{L}{12} = l$$

من ذلك نجد أن العقربين يلتقيان عند الساعة $L = \frac{12k}{11}$ والدقيقة $l = \frac{60k}{11}$ حيث $k = 0,1,2,\ldots,11$.

الآن، عندما $k = 11$ يكون $l = 12$ و $L = 60$ (وهذا يقابل أيضاً $l = 0$ و $L = 0$ عندما يكون $k = 0$).

إذن، يلتقي العقربان 11 مرة كل 12 ساعة.

(٦.٣٩)

لاحظ أن $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. بما أن a و b عددان فرديان فإن a^2+ab+b^2 عدد فردي، ولذا فإنه لا يقبل القسمة على 2^n لكل $n \geq 1$. إذن، 2^n يقسم a^3-b^3 إذا وفقط إذا كان 2^n يقسم $a-b$.

(٦.٤١)

نفرض لغرض التناقض أن:

$$(n+2)^3 = n^3 + (n+1)^3$$

إذا كان n زوجيًّا فإن الطرف الأيسر زوجي والطرف الأيمن فردي. لذا فإن n يجب أن يكون فرديًّا. الآن:

$$(n+2)^3 - n^3 = (n+1)^3$$
$$8 + 12n + 6n^2 = (n+1)^3$$

لاحظ أن $(n+1)^3$ يقبل القسمة على 8 ولكن $8+12n+6n^2$ لا يقبل القسمة على 8 (لأنه لو كان يقبل القسمة على 8 فإن $12n+6n^2$ يجب أن يقبل القسمة على 4 ومن ثم فإن n يجب أن يكون زوجياً). إذن، المساواة مستحيلة.

(٦.٤٣)

إذا كان n زوجيًّا فإن:

$$3^n + 1 = (4-1)^n + 1 = 4k + (-1)^n + 1 = 4k+2$$

حيث k عدد صحيح. ولذا فإنه لا يمكن أن يقبل القسمة على 4. وبالتالي لا يمكن أن يقبل القسمة على 2^n عندما يكون $n > 1$.

إذا كان n فردياً فإن $n = 2\ell + 1$ لعدد صحيح ℓ. ولذا نجد أن:

$$3^n + 1 = 3(8+1)^\ell + 1 = 8k' + 3 \times 1^\ell + 1 = 8k' + 4$$

حيث k' عدد صحيح. وبما أن هذا العدد لا يقبل القسمة على 8 فإنه لا يقبل القسمة على 2^n (لاحظ أن $n > 1$ و n فردي يعني أن $n \geq 3$).

(٦.٤٥)

بما أن $5 = 8 - 3$ فإن:

$$\begin{aligned} 5^n + 2\times 3^{n-1} + 1 &= (8-3)^n + 2\times 3^{n-1} + 1 \\ &= 8\times k + (-3)^n + 2\times 3^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

إذا كان $n = 2\ell$ زوجيًّا فإن:

$$\begin{aligned} 8\times k + (-3)^n + 2\times 3^{n-1} + 1 &= 8\times k + 5\times 3^{n-1} + 1 \\ &= 8\times k + (8-3)\times 3^{n-1} + 1 \\ &= 8\times k' - 3^n + 1 \\ &= 8\times k' - (8+1)^{\ell} + 1 \\ &= 8\times k'' - 1^{\ell} + 1 \\ &= 8\times k''' \end{aligned}$$

حيث k, k', k'', k''' أعداد صحيحة. أما إذا كان $n = 2j+1$ فردياً فإن:

$$\begin{aligned} 8\times m + (-3)^n + 2\times 3^{n-1} + 1 &= 8\times m - 3\times 3^{n-1} + 2\times 3^{n-1} + 1 \\ &= 8\times m - 3^{n-1} + 1 \\ &= 8\times m - 3^{2j} + 1 \\ &= 8\times m - (8+1)^j + 1 \\ &= 8\times m' - 1^j + 1 \\ &= 8\times m'' \end{aligned}$$

حيث m، m'، m'' أعداد صحيحة.

(٦.٤٧)

يمكن افتراض أن العدد a مكون من خانتين (دون المساس بالعمومية). أي أن:

$$a = 10b + c \text{ حيث } 0 \le b\,،c \le 9$$

إذن،

$$a^2 = 100b^2 + 10(2bc) + c^2$$

من ذلك تكون:

$$\text{خانة آحاد } 2bc + \text{خانة عشرات } c^2 = 7$$

لذا فإن خانة عشرات c^2 يجب أن تكون عدداً فردياً ومن ثم فإن $c = 4$ أو $c = 6$.

إذا كان $c = 4$ فإن آحاد $2bc$ هي 6. أي أن خانة آحاد $8b$ هي 6. من ذلك نجد أن $b = 2,7,9$.

إذا كان $c = 6$ فإن خانة آحاد $2bc$ هي 4. أي أن خانة آحاد $12b$ هي 4. من ذلك نجد أن $b = 2,7$. إذن، قيم a المحتملة هي 24، 74، 94، 26، 76. ومن ذلك فإن خانة الآحاد إما أن تكون 4 أو 6.

(٤٩،٦)

بفك الطرف الأيسر للمعادلة:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + 2x^2 + 2x + 2$$

ومقارنة المعاملات نحصل على:

$$a + c = 0$$
$$b + ac + d = 2$$
$$ad + bc = 2$$
$$bd = 2$$

من المعادلة الأخيرة يمكن افتراض أن $|b| = 2$ و $|d| = 1$.

من المعادلة الأولى نجد أن a و c إما أن يكونا فردين معًا أو زوجين معًا. إذا كانا زوجين معًا فإن الطرف الأيسر من المعادلة الثانية يجب أن يكون فرديًّا والطرف الأيمن زوجيًّا وهذا مستحيل.

أما إذا كانا فرديين معًا فإن الطرف الأيسر من المعادلة الثالثة يجب أن يكون فرديًا والطرف الأيمن زوجيًّا وهذا مستحيل أيضًا. إذن، لا يمكن أن تكون جميع الأعداد a، b، c، d صحيحة.

(٥١,٦)

لنفرض أن $r \neq -1$ **(الحالة** $r = -1$ **واضحة). إذا كان** $|a| > 1$ **فإن** $a \neq 1$ **يقسم** $a_{a+1} = a + ar$ **. إذا كان** $a = 0, \pm 1$ **فإن** $a + 3r \neq 1$ **يقسم** $a_{a+3r+3} = a + ar + 3r^2 + 3r = (a+3r)(1+r)$ **.**

(٥٣,٦)

يوجد $\binom{5}{4}$ **طريقة لاختيار أربعة أعداد من خمسة أعداد و** $4!$ **طريقة لكل من هذه الخيارات. إذن، عدد هذه الأعداد هو** $5 \times 24 = 4!\binom{5}{4}$ **. بكتابة هذه الأعداد عموديًّا نجد أن:**

$$\begin{array}{c} 1234 \\ 1235 \\ 1243 \\ 2543 \\ \vdots \end{array}$$

لاحظ أن كلاً من 1، 2، 3، 4، 5 **يظهر** $\frac{1}{5}$ **مرة كخانة آحاد و** $\frac{1}{5}$ **مرة كخانة عشرات و** $\frac{1}{5}$ **مرة كخانة مئات و** $\frac{1}{5}$ **مرة كخانة آلاف. إذن، مجموع هذه الأعداد هو:**

$$24 \times 1111 + 24 \times 2222 + 24 \times 3333 + 24 \times 4444 + 24 \times 5555 = 399960$$

(٥٥,٦)

لاحظ أن:

$$17x + 17y - (9x + 5y) = 8x + 12y = 4(2x + 3y)$$

إذن، 17 **يقسم** $2x + 5y$ **إذا وفقط إذا كان** 17 **يقسم** $9x + 5y$ **.**

(٦.٥٧)

أصغر قيمة للعدد n هي:

$$n = p_1 p_2 \dots p_k$$

حيث p_i أعداد أولية متتالية و $p_1 = 2$. إذن، $p_i \geq 2$. ومن ذلك نحصل على $n \geq 2^k$. أي أن $\log n \geq k \log 2$.

(٦.٥٩)

لاحظ أن $n^{n-1} - 1 = \left[(n-1)+1\right]^{n-1} - 1$. باستخدام مبرهنة ذات الحدين نجد أن:

$$\begin{aligned} n^{n-1} - 1 &= (n-1)+1^{\,n-1} - 1 \\ &= \binom{n-1}{0}(n-1)^{n-1} + \binom{n-1}{1}(n-1)^{n-2} + \cdots \\ &\quad + \binom{n-1}{n-3}(n-1)^1 + \binom{n-1}{n-2} + 1 - 1 \\ &= \binom{n-1}{0}(n-1)^{n-1} + \binom{n-1}{1}(n-1)^{n-2} + \cdots \\ &\quad + \binom{n-1}{n-3}(n-1)^2 + (n-1)(n-1) \end{aligned}$$

حيث استخدمنا الحقيقة $\binom{n-1}{n-2} = n-1$.

الآن، كل حد من حدود المجموع الأخير يقبل القسمة على $(n-1)^2$.

إذن، $(n-1)^2$ يقسم $n^{n-1} - 1$.

(٦١،٦)

لاحظ أن:

$$n^2(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)$$

(خمسة أعداد صحيحة متتالية). أحد هذه الأعداد يقبل القسمة على 4 وعدد آخر يقبل القسمة على 2 وعددان يقبل كل منهما القسمة على 3 وعدد يقبل القسمة على 5. إذن، يقبل حاصل ضرب هذه الأعداد القسمة على

$$4\times 2\times 3\times 3\times 5=360.$$

(٦٣،٦)

نفرض أن $a=12r$ **و** $b=12s$ **حيث** r **و** s **أوليان نسبيًا. عندئذ،**

$$12rs=432$$

$$rs=36=2\times 2\times 3\times 3$$

بما أن r **و** s **أوليان نسبياً فإن** $r=4$ **و** $s=9$ **أو العكس. إذن،** $a=108$ **و** $b=48$ **أو العكس.**

(٦٥،٦)

بفك $(m+n+k)^3$ **نجد أن**

$$(m+n+k)^3=k^3+3k^2m+3km^2+m^3+3k^2n+6kmn$$
$$+3m^2n+3kn^2+3mn^2+n^3$$
$$=m^3+n^3+k^3+3K$$

حيث K **عدد صحيح. إذن، يقبل** $(m+n+k)^3$ **القسمة على 3 إذا وفقط إذا قبل** $m^3+n^3+k^3$ **القسمة على 3.**

(٦٧،٦)

لاحظ أن:

$$m^2=p^2-n^2=(p+n)(p-n)$$

ضع $a=p+n$ **و** $b=p-n$**. الآن، لكل قيمة للعددين** a **و** b **نستطيع**

إيجاد قيمة لكل العددين p و n وذلك بحل المعادلتين أعلاه. أي أن:

$$p = \frac{a+b}{2}$$
$$n = \frac{a-b}{2}$$

وبما أن p و n عددان صحيحان فإن الشرط الوحيد على a و b هو أن يكون كلاهما زوجياً أو كلاهما فردياً (لكي يقبل كل من $a+b$ و $a-b$ القسمة على 2). إذن، لكل m ولكل a و b من نفس النوعية ويحققان :

$$m^2 = ab$$

نستطيع إيجاد عددين وحيدين يحققان المعادلة:

$$m^2 + n^2 = p^2$$

وهذا يصنف جميع ثلاثيات فيثاغورس.

(٦.٦٩)

تحليل كثيرة الحدود بمعاملات حقيقية هو:

$$x^8 + x^4 + 1$$
$$= (1 - x + x^2)(1 + x + x^2)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$$

(٦.٧١)

سنجد مجموع مجموع مجموع خانات 4444^{4444} . سنستخدم أيضاً أنه إذا كان $n = 9c + r$ فإن مجموع خانات n يجب أن يكون على الصورة $9c' + r$ (الباقي r هو نفسه). لاحظ أولاً أن $4444 = 9 \times 494 - 2$. إذن:

$$4444^{4444} = 9 \times 494 - 2^{\;4444} = 9\ell + 2^{4444}$$

حيث ℓ عدد صحيح. بما أن $2^3 = 8 = 9 - 1$ وأن $4444 = 3 \times 1481 + 1$ فإن:

$$\begin{aligned} 2^{4444} &= 2^{3\times 1481+1} \\ &= 8^{1481}\times 2 \\ &= (9-1)^{1481}\times 2 \\ &= (9k-1)\times 2 \\ &= 9k'-2 \end{aligned}$$

حيث k و k' عددان صحيحان. إذن، يمكن كتابة العدد 4444^{4444} على الصورة:

$$9\ell+9k'-2=9(l+k')-9+7=9k''+7$$

حيث k'' عدد صحيح.

إذن، مجموع مجموع مجموع مراتب 4444^{4444} يجب أن يكون على الصورة $9c+7$. الآن، العدد 4444^{4444} أصغر من العدد 10000^{4444} (عدد خاناته 4445). إذن، مجموع خانات 4444^{4444} لا يزيد عن $40005 = 9\times 4445$. الآن، عدد خانات 40005 يساوي 5. من ذلك فإن مجموع خاناته لا يزيد على $45 = 9\times 5$. وأخيراً، مجموع خانات عدد أصغر من 45 هو عدد مكون من خانة واحدة. إذن، مجموع مجموع مجموع خانات 4444^{4444} هو عدد مكون من خانة واحدة على الصورة $9c+7$. والخيار الوحيد هو أن يكون 7. إذن مجموع مجموع مجموع خانات 4444^{4444} هو 7.

(٧٥.٦)

سنبرهن أن $n^{11}-n$ يقبل القسمة على 11 وبرهان الحالة $n^{13}-n$ مشابه. لاحظ أولاً أنه يمكن كتابة أي عدد n على الصورة:

$$n=11m+q \quad \text{حيث} \quad 0\le q<11$$

وباستخدام مبرهنة ذات الحدين نجد أن:

$$n^{11}-n=(11m+q)^{11}-(11m+q)=11A+q^{11}-q$$

من ذلك نجد أن $n^{11}-n$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا قبل العدد $q^{11}-q$ القسمة على 11 لكل $0 \leq q < 11$. ومن السهل الآن إثبات أن $q^{11}-q$ يقبل القسمة على 11 بتجريب جميع الأعداد $q = 0,1,\ldots,10$.

بصورة عامة، يقبل العدد $n^{k}-n$ القسمة على k لكل عددين صحيحين n و k. تسمى هذه الحقيقة "مبرهنة فيرما الصغرى" (لكي نفرق بينها وبين مبرهنة فيرما الأخيرة). وبرهان هذه المبرهنة ليس بالأمر العسير باستخدام حساب التطابقات.

متفــــــرقات
A Miscellany

(١,٧)

أحد الأمثلة على ذلك هو:

$$4+5+9+13+\frac{72}{8}+60$$

سنبين الآن أنه لا يمكن الحصول على مجموع يساوي 100 إلا إذا استخدمنا الكسور.

لاحظ أولاً أن:

$$0+1+2+\cdots+9=45$$

وأن 45 يقبل القسمة على 9 . نعلم أن العدد يقبل القسمة على 9 إذا وفقط إذا قبل مجموع خاناته القسمة على العدد 9 . في الحقيقة، باقي قسمة أي عدد صحيح موجب على 9 يساوي باقي قسمة مجموع خاناته على 9 . إن هذا يعني أننا لو طرحنا مجموع خانات العدد من العدد نفسه فإن ناتج الطرح عدد يقبل القسمة على 9 . على سبيل المثال، $28-(2+8)=18$ و $49-(4+9)=36$ وهكذا. لنفرض الآن أن N هو مجموع أعداد صحيحة موجبة تستخدم كل من الأعداد $0,1,2,\ldots,9$ مرة واحدة فقط. عندئذ:

$$N-(0+1+2+\cdots+9)=N-45$$

يقبل القسمة على 9 . ولذا فإن $N\neq 100$ لأن $100-45=55$ لا يقبل القسمة على 9 .

(٢,٧)

من الواضح أنه يمكن حل هذه المسألة بطريقة مشابهة لحل المسألة السابقة

مع عدم استخدام الحمولة الكاملة للقارب في الرحلات. أحد الحلول الممكنة باستخدام حمولة القارب كاملة في الرحلات هو:

(١) يتم نقل A، M، m إلى الضفة الثانية.

(٢) ترجع A بالقارب إلى الضفة الأولى.

(٣) يتم نقل A، a، b إلى الضفة الثانية.

(٤) ترجع A بالقارب إلى الضفة الأولى (يمكن استبدال A بأي سيدة أخرى).

(٥) وأخيراً يتم نقل A و B إلى الضفة الثانية.

(٥.٧)

نستخدم ترميز التمرين السابق ونفترض النقل من الضفة الأولى إلى الضفة الثانية. أيضاً نرمز للقاربين بالرمزين T_1 و T_2.

(١) يتم نقل a_1 و b_1 في القارب T_1 و a_2 و b_2 في القارب T_2 إلى الضفة الثانية.

(٢) يعود a_1 بالقارب T_1 و a_2 بالقارب T_2 إلى الضفة الأولى.

(٣) يتم نقل a_1 و c_1 بالقارب T_1 و a_2 و c_2 بالقارب T_2 إلى الضفة الثانية.

(٤) يعود b_1 و b_2 بالقاربين T_1 و T_2 إلى الضفة الأولى.

(٥) يتم نقل m_1 و b_1 بالقارب T_1 و m_2 و b_2 بالقارب T_2 إلى الضفة الثانية.

(٦) الآن، يوجد أربعة أشخاص على الضفة الأولى والرجل الثالث مع زوجاته الثلاث والقارب على الضفة الثانية لأن الرجلين الأول والثاني لا يستطيعا إعادة أي من زوجاتهم إلى الضفة الأولى وذلك لعدم ترك أي من الزوجات مع m_3 على الضفة الأخرى. إذن، يعود m_1 و m_2 بالقاربين إلى الضفة الأولى.

(٧) يتم نقل m_3 مع إحدى زوجاته إلى الضفة الثانية بالقارب T_1 ونقل m_1 و m_2 بالقارب T_2 إلى الضفة الثانية.

(٨) الآن، أي زوجتين على الضفة الثانية تستطيع نقل القاربين إلى الضفة الأولى ليعودا بالزوجتين الباقيتين إلى الضفة الثانية.

(٧,٧)

الحل هو:

$$B, C, D, G, I, J, L, M, N, O, P, Q, R, S, U, V, W, Z$$

التفسير ذلك أنظر المسألة (٣,٢,٧).

(٩,٧)

من الواضح أنه يمكن إنجاز المطلوب باستخدام دائرة واحدة فقط إذا سمحنا بتقاطع النقاط الداخلية للدائرة مع أضلاع المربع. إذن، الشرط هنا هو عدم السماح بتقاطع النقاط الداخلية للدوائر مع أضلاع المربع. محيط الدائرة يمس ضلع أو ضلعين على الأكثر. إذا أردنا تغطية المربع بعدد منته من الدوائر فإن بعض هذه الدوائر يجب أن تكون مماسة للأضلاع. ولكن يتقاطع المستقيم مع الدائرة بنقطة واحدة فقط. لذا نستطيع بعدد منته من الدوائر تغطية عدد منته من نقاط أضلاع المربع. بما أن عدد نقاط أضلاع المربع غير منته يجب أن تقع جميع نقاط أضلاع المربع ما عدا عدد منته منها خارج جميع الدوائر.

(٧,٧)

مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 1 تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}$. لذا إذا استطعنا تكوين مربع منه فإن طول ضلع المربع يساوي $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ وطول قطره يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt[4]{3}$. لاحظ أن كلاً من طول الضلع وطول القطر أصغر من 1. لذا، إذا كان بالإمكان قطع المثلث مرة واحدة بحيث نحصل على قطعتين يمكن إنشاء مربع منهما فإنه يجب قطع جميع أضلاع المثلث (طول كل منها 1). من الواضح، أن هذا مستحيل بالقطع مرة واحدة فقط.

(١٢,٧)

نبدأ بالعدد 1. نبدأ بعدما نرى: واحد "1". ونكتب الحدود:

$$1,1,1$$

نقوم بالعد مرة أخرى. الآن، نرى "ثلاث" 1. نضيف $3,1$ إلى حدود المتتالية لنحصل على:

$$1,1,1,3,1$$

الآن، نرى "أربعة" 1 و "واحد" 3. نضيف ذلك إلى المتتالية لنحصل على:

$$1,1,1,3,1,4,1,1,3$$

الآن، نرى "ستة" 1، "اثنان" 3، "واحد" 4. بعد إضافة ذلك إلى حدود المتتالية نحصل على :

$$1,1,1,3,1,4,1,1,3,6,1,2,3,1,4$$

وبالاستمرار نحصل على:

$$1,1,1,3,4,1,1,3,6,1,2,3,1,4,8,1,3,3,2,4,1,6,1,2$$

إذن، "?" هي 1.

(١٣,٧)

بصورة عامة:

$$\frac{a^3+b^3}{2} \neq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

لأن الدالة $Y \mapsto Y^3$ ليست خطية.

(١٩,٧)

لنفرض أن 1000 شخص قرروا تدوير الدولاب. بالفرض، 800 شخص يكسب كل منهم 800 دولار. إذن، 200 منهم لن يكسبوا شيئًا. من ذلك نرى أنه في المتوسط كل شخص يكسب 640 دولارًا. لذا، في المتوسط يكون من المربح تدوير الدولاب.

(٧,٢٣)

نفرض لغرض التناقض أن r عدد كسري حيث $r^2 = 8$. إذن، $\frac{r}{2}$ عدد كسري. ولكن:

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

وهذا مستحيل لأنه يناقض التمرين رقم (٢٢,٧) حيث بينا عدم وجود عدد كسري مربعه 2. إذن، لا يوجد عدد كسري مربعه 8.

(٧,٢٥)

لنفرض أن r و s عددان كسريان مختلفان. وأن $r < s$. عندئذ، $a = \frac{s-r}{\sqrt{2}}$ عدد غير كسري، لأنه لو كان $a = \frac{s-r}{\sqrt{2}}$ عددًا كسريًّا لكان $\sqrt{2} = \frac{s-r}{a}$ عددًا كسريًّا، وهذا يناقض التمرين رقم (٢٢,٧). أيضًا، a عدد موجب أصغر من $s - r$. إذن، $r < r + a < s$. كما أن $r + a$ عدد غير كسري (لأنه لو كان عددًا كسريًّا فإن $a = r + a - r$ عدد كسري، وهذا مستحيل كما رأينا سابقًا.

الحياة الواقعية
Real life

(١٫٨)

نفرض أن R هو نصف قطر القوس وأن φ الزاوية المولّدة مقاسة بالراديان.

عندئذ:

$$2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 5280$$
$$R\varphi = 5281$$

المطلوب هو إيجاد:

$$.\, h = R - R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

باستخدام المعادلة الأولى نجد أن

$$h = R - \sqrt{R^2 - (2640)^2}$$

لذا، يكون المطلوب هو إيجاد R . إن هذا ليس سهلاً ولكن يمكن حسابه. من المعادلتين الأولى والثانية نحصل على:

$$R\sin\left(\frac{2645.5}{R}\right) = 2640$$

يمكن إيجاد قيمة تقريبية باستخدام برامج حاسب جاهزة أو يمكن استخدام الحاسب الآلي لرسم ذلك. على سبيل المثال، ارسم $R\sin\left(\frac{2640.5}{R}\right) - 2640$ ثم جد الفترة التي تكون فيها قيمة الدالة تساوي صفر. باستخدام هذه الطريقة واستخدام برامج جاهزة من Mathematica وجدنا $R \approx 78335.08051$. من ذلك نجد أن $h \approx 44.4985$ قدم وهذا أكبر بكثير مما هو متوقع.

(٥٢.٨)

تعتمد الحسابات على السنة التي سنعتبرها قاعدة لحساب أسعار السلع. انظر أيضاً الشرح الموجود في كتاب "كيفية استخدام الإحصاء للتضليل" لمؤلفه دايريل هوف (Darrel Huff)

حصل غلاء في المعيشة: خذ السنة الماضية قاعدة للحسابات. فلإيجاد نسبة التغير في الأسعار نفرض أن سعر السلع في السنة الماضية هو 100 . إن هذا يعني أن سعر الخبز زاد 200% عن سعره في السنة الماضية وأن سعر الحليب نقص 50% عن السنة الماضية. متوسط 200 و50 هو 125 . إذن، حصل غلاء في المعيشة بنسبة 25% .

حصل انخفاض في المعيشة: خذ هذه السنة كقاعدة للحسابات. نفرض أن سعر السلع هذه السنة هو 100 . سعر الحليب في السنة الماضية 200% من سعره لهذه السنة وسعر الخبز في السنة الماضية 50% من سعره لهذه السنة. المتوسط هو 125 . لذا فإنه حصل انخفاض في غلاء المعيشة عن السنة الماضية.

لم يحصل تغير في غلاء المعيشة: خذ السنة الماضية كقاعدة للحسابات واستخدم المتوسط الهندسي عوضاً عن المتوسط الحسابي. سعر الحليب الآن يساوي 50% من سعره في السنة الماضية وسعر الخبز يساوي 200% من سعره في السنة الماضية. المتوسط الهندسي $100 = \sqrt{50 \times 200}$. إذن، لم يحصل تغير في غلاء المعيشة لهذه السنة عن سابقتها.

(٧.٨)

انظر صفحة 82 من المرجع المستخدم في التمرين السابق. من الواضح أن الربح هو 1% من المبيعات الكلية (1 سنت في السلعة، 1 دولار لكل سلعة). أيضاً، النقود المستثمرة هي 99 سنت والربح الكلي هو 365 سنتاً. وهذا تقريباً 365% من قيمة النقود المستثمرة.

(٩.٨)

بالرجوع إلى الموسوعة البريطانية نجد أن معدل نمو الشعر هو 0.5 بوصة كل شهر. عدد الساعات في الشهر هو $720 = 30 \times 24$. وعدد البوصات في الميل هو $63360 = 5280 \times 12$. إذن، معدل نمو الشعر هو:

$$\frac{0.5 \times 720}{63360} = 0.315657 \times 10^{-4}$$ ميل في الساعة.

(١١.٨)

نستخدم صيغة بيز (انظر: الفصل الثالث) لحل هذه المسألة ولهذا الغرض نستخدم الترميزات التالية:

A : حدث أن يكون أحمد مصاباً بمرض جنسي.

B : حدث أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية.

C : حدث أن تكون نتيجة الاختبار سلبية.

D : حدث الإصابة بمرض جنسي.

إذن، المطلوب هو إيجاد كل من $P(A \mid B)$ و $P(A \mid C)$. الآن:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A')} \\ &= \frac{0.98 \times 0.005}{0.98 \times 0.005 + 0.02 \times 0.995} \\ &= 0.197581 \end{aligned}$$

وهذا احتمال صغير جداً. انظر أيضاً [PAUL, p89] لمزيد من التفاصيل حول هذه المسألة. أيضاً:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(C \mid A)P(A)}{P(C \mid A)P(A) + P(C \mid A')P(A')} \\ &= \frac{0.02 \times 0.005}{0.02 \times 0.005 + 0.98 \times 0.995} \\ &= 0.000102543 \end{aligned}$$

الآن، بما أن الاختبارات المختلفة مستقلة عن بعضها البعض فإن احتمال أن يكون أحمد مصابًا بمرض جنسي بعد إجراء اختبارين سلبين هو مربع احتمال أن يكون أحمد مصابًا بمرض جنسي بعد إجراء اختبار سلبي واحد. أي:

$$(0.000102543)^2 \approx 10^{-8}.$$

(١٣.٨)

الملاحظة المهمة في هذا التمرين هو أن يركب أحمد الحافلة التي تصل أولاً. إن هذا يعني أنه لو كانت الحافلة المتجهة إلى الرياض تصل دائمًا قبل الحافلة المتجهة إلى جدة بدقيقتين فإن أحمد نادر ما يركب الحافلة المتجهة إلى جدة. في الحقيقة، إذا لم يصل أحمد إلى المحطة بفترة الدقيقتين فإنه سيركب دائما الحافلة المتجهة إلى الرياض. الآن، تصل ثلاث حافلات كل ساعة (أي 3 فترات من الطول بزمن قدره دقيقتان كل ساعة).إذن، احتمال أن يستقل أحمد الحافلة المتجهة إلى جدة هو $\frac{1}{10} = \frac{3}{60} \times 2$. أي أنه سيزور والديه المقيمين في الرياض تسع مرات أكثر من زيارة جده المقيم في جدة.

(١٥.٨)

بدأ في العدِّ (1، 2، 3،...) عند خروجه من بيته متجهًا إلى بيت صديقه. أثناء جلوسه عند صديقه أعاد العد بنفس الوتيرة مع توقيت ذلك هذه المرة (لوجود ساعة عند بيت صديقه). عند مغادرته بيت صديقه لاحظ الوقت الذي تشير ساعة صديقه ثم أضاف الزمن الذي استغرقته الرحلة من بيت صديقه إلى بيته وضبط ساعته.

(١٧.٨)

عدد شعر رأس الشخص الواحد هو على الأكثر 500000 شعرة. بما أن عدد سكان مدينة نيويورك هو 10 ملايين نسمة فإننا نرى باستخدام مبدأ برج الحمام وجود شخصين لهما العدد نفسه من الشعر. انظر [PAUL 1, p 42] لمزيد من التفاصيل.

(٨.١٩)

احتمال عدم هطول أمطار هو $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. إذن، احتمال هطول أمطار هو:
$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. أي 75%.

(٨.٢١)

استنادًا إلى الموسوعة البريطانية، يوجد 60 ميللتر من الدم لكل كغم واحد في جسم الإنسان. لنفرض أن متوسط وزن الشخص الواحد هو 50 كغم (لاحظ أننا أدخلنا الأطفال في هذه الحسابات). عدد سكان الولايات المتحدة الأمريكية هو 250 مليون نسمة. إذن، حجم الدم الموجود في أجسام سكان الولايات المتحدة الأمريكية هو:

$$60 \times 50 \times 250 \times 10^6 = 75 \times 10^{10}$$ ميللتر.

أو 750 متر مكعب. لنفرض الآن، أن r هو نصف قطر قاعدة نادي بوش مقاسًا بالأمتار. لذا يكون المطلوب هو إيجاد h حيث $\pi r^2 h = 750$.

(٨.٢٣)

احتمال أن يسقط العامل فطيرة الهامبرجر هو 0.3. بفرض أن الحوادث مستقلة نجد أن احتمال أن يسقط العامل 4 فطائر من العشر فطائر التالية هو:

$$(0.3)^4(0.7)^{10}\binom{10}{4} \approx 0.200121.$$

(٨.٢٥)

بما أن عدد شعر رأس الشخص الواحد هو 500000 شعرة على الأكثر فإن عدد شعر رأس الشخص الواحد يقع بين 0 و 500000. لذا نحتاج إلى 500001 خيار. إذن، عدد الأشخاص اللازم هو 500002.

مسألة إيجاد عدد الأشخاص الذين نحتاجهم قبل الحصول على شخصين لهما العدد نفسه من الشعر مماثلة لمسألة تاريخ الميلاد التي ناقشناها في الكتاب.

نفرض أن توزيع شعر المجتمع منتظماً ويتراوح عدده من 0 إلى 500000 شعرة وأنه لا توجد علاقة بين أعداد شعر الأشخاص المختلفين. عندئذ،

$$P(\text{شخصان على الأقل من } N \text{ من الأشخاص لهما العدد نفسه من الشعر})$$
$$= 1 - P(\text{جميع الأشخاص } N \text{ لهم عدد مختلف من الشعر})$$
$$= 1 - \frac{500001 \times 500000 \times \cdots \times (500001 - N + 1)}{(500001)^N}$$

بالاستعانة بالحاسب الآلي نجد أن هذا العدد أكبر من $\frac{1}{2}$ عندما يكون $833 \geq N$. إذن، نحتاج إلى 833 شخصاً لكي يكون الاحتمال $\frac{1}{2}$ على الأقل.

(٢٩.٨)

السبب هو أن متوسط أعداد العامين لا يساوي مجموع متوسط أعداد كل من العامين. على سبيل المثال، إذا كان عدد سمكات حسن 4 سمكات في رحلة واحدة عام 1987 و 3 سمكات في رحلة واحدة عام 1988، وكان عدد سمكات مرعي 31 سمكة في 8 رحلات عام 1987 و 5 سمكات في رحلتين عام 1988 فإن:

$$\frac{4}{1} > \frac{31}{8}$$
$$\frac{3}{1} > \frac{5}{2}$$

ولكن متوسط عدد سمكات حسن في العامين هو:

$$\frac{4+3}{1+1} = \frac{7}{2} = 3.5$$

ومتوسط عدد سمكات مرعي في العامين هو:

$$\frac{31+5}{8+2} = \frac{36}{10} = 3.6$$

لذا فإن متوسط مرعي في العامين أكبر من متوسط حسن في العامين. انظر [PAUL 1, p 44] لمزيد من النقاش حول هذه المسألة ومسائل مشابهة أخرى.

(٣٣.٨)

إذا كان تساقط المطر رأسيًّا فإن أفضل إستراتيجية هي عدم الحركة لأنه بهذه الطريقة تكون المساحة السطحية المعرضة للمطر أقل. أما إذا كان المطر يتساقط بزاوية فإن أفضل إستراتيجية هي الحركة باتجاه تساقط المطر وبنفس السرعة الأفقية للمطر. لأن التحرك باتجاه تساقط المطر وبنفس السرعة يماثل تقريبًا تساقط المطر رأسيًّا وعدم الحركة.

(٣٥.٨)

لنفرض أن تكلفة تصنيع الإطار تتناسب مع مدة استخدامه. إذا أنتجت الشركة إطارات تتآكل بعد أقل 20000 ميل فإنها ستدفع مبلغًا كبيرًا كتعويض لاستبدال هذه الإطارات. وبالمثل، إذا أنتجت الشركة إطارات تتآكل بعد أكثر من 40000 ميل فإن الثمن الذي سيعود عليها قليلاً. إذن، العدد الذي يجعل الربح أعظميًّا هو متوسط هاتين الحالتين. أي، إنتاج إطارات تتآكل بعد 30000 ميل. لاحظ أنه في المتوسط نصف الأشخاص الذين يشترون إطارات مكفولة 30000 ميل سيعيدونها للشركة.

(٣٧.٨)

انظر: [PAUL 1, p 28] و [REN] للاطلاع على مثل هذه الحالات.

(٣٩.٨)

السبب وراء الشكل الدائري هو أن المناهل لا تسقط في الحفر وتؤذي العمال تحتها. من الواضح أن الأشكال الأخرى القريبة من أن تكون دائرية تؤدي المطلوب ولكن سيكون إعادتها إلى مكانها بعد انتهاء المهمة أصعب.

(٤٥.٨)

إذا فرضنا أن عدد مفاتيح الآلة الطابعة هو 35 وأن عدد رموز مسرحية هاملت هو 500000 فإن احتمال أن يطبع قرداً مسرحية هاملت هو $p = \left(\frac{1}{35}\right)^{500000}$. لنفرض أن K عدد كبير من الرموز. عندئذ، ستظهر مسرحية هاملت في الرموز من 1 إلى 500001 أو من 3 إلى 500003 وهكذا. أي أن مسرحية هاملت يمكن أن تبدأ من الرمز الأول أو الثاني أو الثالث إلى $k - 500000 + 1$ من الرموز. إذن، لدينا $k - 499999$ من الخيارات للحصول على مسرحية هاملت. لذا فإن احتمال الحصول على مسرحية هاملت من هذه الرموز هو $p \times (K - 499999)$.

الآن، المطلوب هو أن يكون هذا الاحتمال يساوي 0.5 . أي أن:

$$K = 499999 + \frac{1}{2p} = 499999 + \frac{1}{2 \times 35^{500000}} \geq 10^{727272}$$

لنفرض أن القردة تستطيع طباعة بليون رمز في السنة (هذا أكبر من حوالي 400000 صفحة لأن الصفحة تحتوي على 2400 رمز). عندئذ، تحتاج القردة إلى 10^{727263} سنة لطباعة مسرحية هاملت (طباعة عشوائية). يتوقع العلماء أن يكون عمر الكون أقل من ذلك بكثير انظر: [PAUL 1, p 75] للمزيد من النقاش حول هذه المسألة ومسألة أخرى ذات علاقة. نقترح أيضاً الاطلاع على القصة القصيرة "مكتبة بابل" لمؤلفها جورج لويس بورجز (Jorge Luis Borges) حيث تحتوي على أفكار مشابهة لهذه المسألة بأسلوب أدبي وأشعار.



أساليب حل المسائل

الحائز على جائزة أفضل كتاب أكاديمي للعام 1997م

قدم كرانتس في هذا الكتاب وبعناية فائقة مخزونًا من المسائل وأساليب لحلها بأسلوب شائق يحفز غالبية المهتمين لاقتناء نسخة من الكتاب كمرجع، أو لاستخدام الأفكار التي يحتويها في مساعدتهم على تطوير مهاراتهم الذهنية. إن الأسلوب الذي استخدمه المؤلف في السرد يحفز القارئ على التعمق في القراءة. كما أن الكتاب يوفر عددًا كبيرًا من المسائل المترابطة، وقد خصص المؤلف الفصل الأول من الكتاب كمقدمة لموضوعات شائقة، ثم ركز في كل من الفصول اللاحقة على تقديم أساليب حل محددة مع توضيح كيفية تطبيق هذه الأساليب في مجالات كالهندسة والمنطق والرياضيات المسلية ومسائل العد. إن الطريقة الخطية التي قدمت بها موضوعات الكتاب في تناول المسائل بترتيب متتال. تجعل من الكتاب أداة رائعة لتحفيز المبتدئين على قراءة بعض موضوعات الرياضيات.

لا ينظر المؤلف إلى موضوع حلول المسائل على أنه قائمة من القدرات العقلية المبدعة، ولكنه يتعدى ذلك حيث يعتبره أسلوب حياة. يوظف العلماء من مختلف المشارب: الكيمياء والفيزياء وعلماء النفس والمهندسون وغيرهم بحرفية كبيرة مجموعة من البيانات لاتخاذ القرارات في اختيار التقنية الملائمة لاستخدام هذه البيانات لحل المسائل . هذه الرؤية هي التي تبناها مؤلف الكتاب في حل المسائل.

إن هدف هذا الكتاب هو تدريس المبادئ الأساسية في حل المسائل سواء أكانت رياضية أم غير رياضية، هذا الكتاب يساعد القارئ على :

- تحويل المناقشات الشفهية إلى بيانات يمكن تحليلها.
- تعلم طرائق حل المسائل لمعالجة مجموعات من الأسئلة أو البيانات التحليلية.
- توفير مخزون شخصي من المسائل المحلولة وأساليب حل المسائل.
- أن يكون مزودًا وجاهزًا لمعالجة فئات متنوعة من الألغاز التي تواجهه في مواقف حياتية مختلفة.

يختلف كتاب كرانتس عن الكتب الأخرى التي تناولت موضوعات حل المسائل في أنه يأخذ منحى مباشرًا وعمليًا في تناوله للموضوع مع تقديمه لنوعين من التمارين، تمارين التحدي وتقدم بعد حل عدد من المسائل، وتمارين تقدم بعد نهاية كل فصل. ويحتوي الكتاب على أكثر من (350) مسألة يمكن إيجاد حلول معظمها في كتاب الحلول المصاحب لهذا الكتاب .

للحصول على مزيد من النسخ اتصل على الموزع الوحيد لإصدارات
مكتب التربية العربي لدول الخليج: مكتبة تربية الغد
جوال ٠٥٠٥٤٤٦٤٨٠ (٠٠٩٦٦) - ٠٥٠٣٤٢١١٢٤ (٠٠٩٦٦)
هاتف: ٢٠٨٤٢٤٤ (٠٠٩٦٦١١) فاكس: ٤٧١٥٩٨٣ (٠٠٩٦٦١١)
ص.ب: ٣٢٥٣٣٨ - الرياض ١١٣٧١ - المملكة العربية السعودية





